Prof. ENRICO COSTA

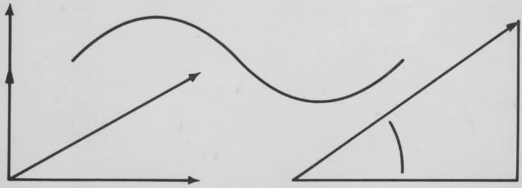
PROBLEMI RADIO E TV

NOZIONI DI MATEMATICA E 362 PROBLEMI SVOLTI PER RADIORIPARATORI ED AUTODIDATTI

147 ILLUSTRAZIONI E XII TABELLE

NOZIONI DI MATEMATICA: ARITMETICA - ALGEBRA - GEOMETRIA - TRIGONOMETRIA - RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE - LOGARITMI - NUMERI COMPLESSI. **PROBLEMI:** CORRENTE - RESISTENZA - TENSIONE - POTENZA - COEFFICIENTE TEMPERATURA - STRUMENTI DI MISURA - CIRCUITO ELETTRICO - PRINCIPI DI KIRCHHOFF - CIRCUITO MAGNETICO - AUTOINDUZIONE - MUTUA INDUZIONE - CAMPO ELETTRICO - CIRCUITO CON *L* IN C.A., *C* IN C.A., *L*, *C*, *R* IN C.A. - FREQUENZA E LUNGHEZZA D'ONDA - VALORI ISTANTANEI - COSTANTE DI TEMPO - TRASFORMATORE - PARAMETRI DELLE VALVOLE - CARICO ANODICO - STADIO DI POTENZA - CONTROREAZIONE - AMPLIFICAZIONE A R.F. - CIRCUITI ACCOPPIATI - SUPERETERODINA - ALIMENTAZIONE - TRANSISTORI - TELEVISIONE - DECIBEL - COMPLESSI FORMA RETTANGOLARE - COMPLESSI FORMA POLARE

2ª EDIZIONE RIVEDUTA E AMPLIATA



HOEPLI

Dello stesso Autore:

Il cinelibro (Passo ridotto). 4ª edizione. Hoepli, 1963.

Filmare in 8 mm. 2ª edizione. Hoepli, 1964.

Introduzione alla televisione. 5ª edizione. Hoepli, 1966.

Televisori commerciali - Vol. I. 2ª edizione. Hoepli, 1962.

Televisori commerciali - Vol. II. Hoepli, 1959.

Televisori commerciali - Vol. III. Hoepli, 1960.

Televisori commerciali - Vol. IV. Hoepli, 1963.

Televisori commerciali - Vol. V. Hoepli, 1967.

Videoriparatore. 5ª edizione. Hoepli, 1965.

Guida pratica del radioriparatore. 8ª edizione. Hoepli, 1965.

Tecnologie elettroniche. 2ª edizione. Hoepli, 1966.

Prof. ENRICO COSTA

PROBLEMI RADIO E TV

NOZIONI DI MATEMATICA

ARITMETICA - ALGEBRA - GEOMETRIA - LOGARITMI
TRIGONOMETRIA - RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE
NUMERI COMPLESSI

362 PROBLEMI SVOLTI PER RADIORIPARATORI E AUTODIDATTI

SECONDA EDIZIONE RIVEDUTA E AMPLIATA

147 illustrazioni e XII tabelle

EDITORE ULRICO HOEPLI MILANO
1967

Tutti i diritti sono riservati a norma di legge
nonchè a norma delle convenzioni internazionali

Copyright 1967 by Ulrico Hoepli (via Hoepli 5), Milan

©

Printed in Italy

PREFAZIONE

È necessario che il radioriparatore sappia eseguire i calcoli relativi alla determinazione dei valori dei vari componenti di un radioricevitore. Questa possibilità è subordinata alla conoscenza delle leggi e fenomeni relativi ai circuiti presi in considerazione ed a quella degli elementi di matematica, con cui eseguire i calcoli.

La conoscenza della matematica, o meglio degli elementi indispensabili di matematica, costituisce, inoltre, il miglior mezzo con cui perfezionare lo studio della radiotecnica.

La breve raccolta di nozioni matematiche, precedente quella dei problemi, va considerata come un promemoria e non come un compendio di matematica. In essa i vari argomenti non sono sviluppati completamente, come nei libri di testo scolastici, ma vi sono condensate solo le nozioni indispensabili al radioriparatore.

Una tale condensazione della materia può richiedere un maggiore sforzo di assimilazione da parte di chi non abbia seguito un corso di matematica ma ha il vantaggio di presentare in modo sufficientemente esatto i limiti entro cui contenere le proprie cognizioni di base.

Il radioriparatore volenteroso può, in un secondo tempo, procurarsi dei testi scolastici sui vari argomenti e perfezionare in modo più organico le cognizioni relative.

I problemi sono stati scelti ed impostati per corrispondere allo sviluppo progressivo di un corso di radiotecnica.

Si è iniziata la serie con un gran numero di problemi di elettrotecnica che vertono, naturalmente, solo su argomenti interessanti i radioriparatori. Lo studio ordinato di questi problemi fa imparare le formule, che si riferiscono al circuito in esame, chiarisce la risoluzione matematica delle formule stesse e porta all'interpretazione dei risultati numerici per la loro utilizzazione.

Nella realizzazione pratica dei circuiti si accetta una notevole approssimazione nella determinazione dei valori dei vari componenti, approssimazione che può giungere anche al $\pm 10\%$, *in quanto i risultati vanno controllati con adatti strumenti di misura.*

Si debba ad esempio calcolare il valore dell'induttanza di una bobina, da inserire nel circuito di un oscillatore, per ottenere una frequenza prestabilita: non potendo misurare il valore esatto *della capacità totale del circuito, in cui la bobina va inserita, è necessario ch'essa abbia il valore di induttanza risultante dal calcolo, ma il suo nucleo deve essere regolabile, per poterne variare il valore fino ad ottenere la frequenza esatta, indicata da un frequenzimetro.*

Il tecnico esperto, dopo aver letto il testo di un problema, può già indicare l'ordine di grandezza del risultato da ottenere, e ciò gli consente di verificare l'esattezza della soluzione.

Questa esperienza è preziosa, per chiunque si interessi di radiotecnica, e va acquisita con lo studio ordinato, da affiancare alla pratica quotidiana.

E. COSTA

INDICE DELLA MATERIA

PARTE PRIMA

NOZIONI DI MATEMATICA

PARTE SECONDA

PROBLEMI

INDICE DELLE TABELLE

TABELLA I.

Principali grandezze ed unità di misura.

Grandezza	Simbolo	Unità di misura	Abbreviaz.
Capacità	*C*	Farad	F
Conduttanza	*G*	Siemens o mho	A/V
Costante dielettrica	ε (epsilon)	Farad/metro	F/m
Energia	*W*	Joule	Joule
Flusso magnetico	Φ (fi)	Weber	Wb
Forza elettromotrice	*E*	Volt	V
Forza magnetica	*H*	Amperspira/metro	Asp/m
Frequenza	*f*	Hertz o periodi/secondo .	Hz
Impedenza	*Z*	Ohm	Ω (omega)
Induttanza	*L*	Henry	H
Induzione magnetica ...	*B*	Weber/metro²	Wb/m²
Intensità corrente	*I*	Ampere	A
Lunghezza	*l*	Metro	m
Lunghezza d'onda	λ (lambda)	Metro	m
Mutua induzione	*M*	Henry	H
Pendenza	*S*	Siemens o mho	A/V
Periodo	*T*	Secondo	sec
Permeabilità	μ (mu)	Henry/metro	H/m
Potenza	*P*	Watt	W
Pulsazione	ω (omega)	Radiante/secondo	rad/sec
Quantità elettricità	*Q*	Coulomb	C
Reattanza	*X*	Ohm	Ω (omega)
Resistenza	*R*	Ohm	Ω (omega)
Resistività	ρ (ro)	Ohm/metro	Ω/m (omega)
Riluttanza	*R*	Amperspira/Weber	Asp/Wb
Superficie	*s*	Metro quadrato	m²
Temperatura	*t*	Grado centigrado	°C
Tempo	*t*	Secondo	sec
Tensione	*V*	Volt	V

PARTE PRIMA

NOZIONI DI MATEMATICA

CAPITOLO I

ARITMETICA

1. Numeri e grandezze.

- Un numero concreto si riferisce a determinate cose o unità di misura e va fatto seguire dal nome dell'unità stessa: 3 ampere, 25 volt.
- Un numero astratto, o numero puro, è un numero adoperato senza alcun riferimento a particolari cose o unità di misura: 3.
- Un numero primo non ha altri divisori che se stesso e l'unità: 3, 5, 7, 11.
- In matematica si dà il nome di grandezza a tutto ciò che, espresso da un numero, può essere raddoppiato, triplicato, ecc.: sono grandezze le superfici, i volumi, i pesi, le tensioni, le correnti, le frequenze.
- Una grandezza che resta invariata, qualunque sia il problema in cui risulti introdotta, si chiama una costante.
- Una grandezza che risulta invariata, in un determinato problema o in una fase di esso, è detta parametro.
- Una grandezza che, nelle condizioni imposte, assume una serie di valori differenti è una variabile.

2. Misure.

- La misura di una grandezza è conosciuta quando si ottiene il numero che ne indica il valore.

Per ottenere ciò è necessario scegliere una grandezza dello stesso tipo, ben definita, presa come unità di misura, e quindi trovare quante volte questa unità è contenuta nella grandezza da misurare: il numero di volte ch'essa vi è contenuta è il valore numerico della grandezza in misura.

Per misurare una lunghezza si deve disporre di un'unità di misura adatta: questa unità corrisponde ad una definita lunghezza, rispetto a cui vanno comparate tutte le altre, ch'è detta metro.

Per misurare una tensione si fa uso dell'unità di misura detta volt; per misurare una corrente l'unità di misura adottata è l'ampere.

3. Precisione ed errori nei calcoli.

• Nei calcoli radiotecnici si fa uso di valori risultanti da misure di grandezze elettriche (tensioni, correnti, ecc.) o in altro modo. È necessario tenere presente la precisione con cui furono effettuate queste misure e saper determinare quante cifre decimali debbono seguire i valori rilevati.

I comuni strumenti di misura hanno una precisione media del $\pm 3\%$, cioè l'errore massimo nella taratura della scala è del 3% del valore massimo indicato in fondo scala. Con un voltmetro con portata massima di 100 V e precisione del $\pm 3\%$ la tensione con cui si ha l'indicazione massima sulla scala ha un valore compreso fra 97 e 103 V, perchè 3 V rappresenta il 3% di errore della massima indicazione o portata del voltmetro.

Se con questo voltmetro si effettua la misura della tensione di una batteria di pile e l'indicazione dello strumento è di 10 V la tensione effettiva della batteria è compresa fra 7 e 13 V.

• Con un voltmetro si misuri la tensione di una batteria il cui valore esatto è di 6,2 V; lo strumento indica 6 V.

L'errore commesso è di $6{,}2 - 6 = 0{,}2$ V; l'errore relativo è dato da:

$$\frac{\text{errore}}{\text{valore esatto}} = \frac{0{,}2}{6{,}2} = 0{,}032$$

• Moltiplicando questo quoziente per 100 si ottiene l'errore percentuale, $3{,}2\%$.

• Effettuare la misura con un voltmetro comporta l'applicazione della tensione allo strumento e la determinazione del valore esatto corrispondente al punto della scala su cui si è fermato l'estremo dell'indice dopo la deviazione.

La precisione con cui va effettuata questa determinazione non dev'essere sopravalutata: ad es. è inutile che si cerchi di stabilire che la tensione letta dal voltmetro è di 99,3 V quando, avendo lo strumento una precisione del $\pm 3\%$, esso indica 100 V con una tensione qualsiasi compresa fra 97 e 103 V. Si può, con un simile strumento, introdurre nei calcoli il valore 100, ritenendolo quello della misura fatta, senza tema di ottenere dei risultati errati.

• Si sono così precisate le possibilità di introdurre errori nei calcoli per errore nell'indicazione fornita dallo strumento e per errore nell'esecuzione della lettura dell'indicazione dello strumento.

• Vi è un altro tipo di errore che occorre saper valutare e cioè il numero delle cifre significative di un numero qualsiasi.

Se, misurata una tensione, la si ritiene di circa 300 V si ha una approssimazione entro i 100 V; se di circa 310 V l'approssimazione è compresa entro i 10 V; se di circa 313 V l'approssimazione è entro il volt.

Per i seguenti numeri: 37 000; 91; 0,0022, si hanno sempre due sole cifre significative, ma se il primo diventa 37 002 la precisione nella determinazione di questo valore è ora di cinque cifre.

Se si moltiplicano due numeri di tre cifre significative, ad es. 131 e 12,7, risulta 1663,7: il prodotto non può avere una precisione maggiore di quella relativa ai due numeri e, poichè questi sono di tre cifre significative, di altre tante cifre va ritenuto il prodotto e lo si può arrotondare a 1660.

Nei calcoli e nelle misure che si effettuano praticamente in radiotecnica non interessa un numero di cifre significative maggiore di tre e si fa perciò sovente uso di arrotondamenti dei risultati, per semplificare le operazioni.

4. Operazioni fondamentali.

- L'espressione aritmetica è un insieme di numeri uniti dai segni delle operazioni.
- La somma e la sottrazione fra due numeri sono indicate, rispettivamente, con i segni $+$ o $-$ fra essi.
- Per indicare il prodotto di due numeri, invece del comune segno di moltiplicazione adoperato in aritmetica ($\times$), si farà uso di un punto posto fra i numeri, ciò per impedire che il detto segno di moltiplicazione venga confuso con la lettera x minuscola, che fa parte del simbolismo algebrico, come si vedrà in seguito.
- Per indicare il prodotto di un numero per una parentesi o di due parentesi fra loro non si introduce alcun segno.
- Per indicare la divisione di due numeri si può far uso di uno dei seguenti segni: $20 : 5 = 4$ oppure $20/5 = 4$ oppure $\frac{20}{5} = 4$.
- Per risolvere un'espressione aritmetica, comprendente delle parentesi di tipo diverso (parentesi tonde, quadre, a graffe), si possono far sparire queste effettuando tutte le operazioni indicate in esse, con l'avvertenza di cominciare dalle parentesi più interne:

$$[20 + (5 \cdot 2)] = [20 + 10] = 30;$$

$$\{36 + [25\,(4 - 2)]\} = \{36 + [25 \cdot 2]\} = \{36 + 50\} = 86;$$

$$[(3 + 7)\,(5 - 2)] = [10 \cdot 3] = 30$$

5. Frazioni.

- Una frazione costituisce la rappresentazione matematica della divisione da effettuare fra due numeri, di cui il dividendo viene scritto superiormente ad una linea orizzontale, ed è detto numeratore della frazione, ed il divisore inferiormente ad essa, ed è detto denominatore. Il numeratore ed il denominatore costituiscono i termini della frazione.
- L'unità può essere messa sotto forma di frazione, il cui numeratore sia costituito da un numero qualsiasi uguale al denominatore:

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{11}{11} = \ldots.$$

• Ogni numero intero può essere scritto sotto forma di frazione, frazione apparente, ponendolo al numeratore mentre al denominatore si pone l'unità:

$$6 = \frac{6}{1}$$

• Quando il numeratore è più piccolo del denominatore, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, la frazione è detta propria; se il numeratore è maggiore del denominatore la frazione è detta impropria e può essere ridotta alla somma di un numero intero e di una frazione:

$$\frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}; \ \frac{8}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

• Un numero misto è la somma di un numero intero e di uno frazionario:

$$8\frac{3}{5} = 8 + \frac{3}{5}$$

• Si possono effettuare le quattro operazioni fondamentali fra le frazioni come fra i numeri interi.

• Per sommare o sottrarre due frazioni con lo stesso denominatore basta sommare o sottrarre, fra loro, i numeratori: il risultato costituisce il numeratore di una frazione, con lo stesso denominatore delle precedenti:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}; \ \frac{16}{21} - \frac{7}{21} = \frac{9}{21}$$

• Per sommare o sottrarre due frazioni con denominatori diversi occorre anzitutto ridurle ad un comune denominatore, operazione che può essere effettuata tenendo presente che moltiplicando il numeratore ed il denominatore di una frazione per uno stesso numero la frazione non si altera: $\frac{3}{5} + \frac{2}{9}$; si moltiplichi la prima delle due frazioni per il denominatore della seconda e la seconda per il denominatore della prima:

$$\frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{27}{45} + \frac{10}{45} = \frac{37}{45};$$

$$\frac{7}{9} - \frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{35 - 18}{45} = \frac{17}{45}$$

• Se si moltiplica il numeratore di una frazione per un numero si moltiplica il valore della frazione per quel numero:

$$\frac{5}{4} = 1\,\frac{1}{4}; \qquad 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4} = 3\left(1\,\frac{1}{4}\right)$$

• Se si moltiplica il denominatore di una frazione per un numero si divide il valore della frazione per quel numero:

$$\frac{6}{6} = 1; \ \frac{6}{6 \cdot 3} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

• Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 11} = \frac{21}{55}$$

• Per dividere una frazione per un'altra si moltiplica la prima per l'inverso della seconda:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{20}$$

Sovente la divisione è fra un numero intero ed una frazione o fra una frazione ed un numero: basta ricordare che il numero intero può essere scritto sotto forma di frazione, con l'unità al denominatore, per ritornare al caso precedente:

$$\frac{\frac{15}{4}}{5} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5}{1}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{20}; \ \frac{6}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{6}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

• Se si divide il numeratore di una frazione per un numero il valore della frazione risulta diviso per quel numero:

$$\frac{6}{8}, \ \frac{\frac{6}{2}}{8} = \frac{6}{16}$$

• Se si divide il denominatore di una frazione per un numero il valore della frazione risulta moltiplicato per quel numero:

$$\frac{3}{8}, \ \frac{3}{\frac{8}{2}} = \frac{6}{8}$$

• Se si moltiplicano o si dividono il numeratore ed il denominatore di una frazione per uno stesso numero, diverso da zero, la frazione resta invariata:

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15}$$

• Per semplificare una frazione, se è possibile, si scrivono il numeratore ed il denominatore sotto forma di prodotti di fattori eliminando quindi quelli comuni ai due termini:

$$\frac{15}{20} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{3}{4}; \quad \frac{15+21}{24+30} = \frac{3\,(5+7)}{3\,(8+10)} = \frac{5+7}{8+10} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

• Per trasformare una frazione in un'altra equivalente ad essa, con un determinato denominatore, multiplo del denominatore dato, si divide quest'ultimo per il denominatore della frazione e si moltiplica il quoziente per il numeratore. La frazione equivalente ha come numeratore questo prodotto e come denominatore quello voluto: $\frac{5}{7}$ va trasformata in una frazione con denominatore 21:

$$21 : 7 = 3; \quad \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21}$$

• Se si effettua la divisione del numeratore per il denominatore di una frazione si trasforma la frazione in un numero decimale:

$$\frac{7}{8} = 0{,}875; \quad \frac{1}{3} = 0{,}333...$$

In questo secondo esempio il numero decimale non risulta finito in quanto la divisione dà sempre un resto e ciò è indicato dai puntini seguenti il numero; il risultato è un numero periodico, che in qualche caso può non essere tale.

• Le frazioni decimali sono quelle che hanno per denominatore il 10 o una sua potenza. Eseguendo la divisione indicata dalla frazione si ha come risultato un numero decimale, costituito dal numeratore avente tante cifre a destra della virgola per quanti sono i zero contenuti al denominatore:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1; \quad \frac{2}{1000} = 0{,}002; \quad \frac{27}{100} = 0{,}27; \quad \frac{372}{10} = 37{,}2;$$

$$\frac{372}{100} = 3{,}72; \quad \frac{372}{1000} = 0{,}372$$

• Eseguite le divisioni per due frazioni, cioè dopo averle convertite in numeri decimali, si possono effettuare fra questi le quattro operazioni fondamentali come fra i numeri interi, osservando alcune norme.
• Per la somma e la sottrazione occorre che le virgole dei due numeri siano in colonna in modo che ugualmente risultino i numeri decimali dello stesso ordine:

$$\begin{array}{r} 0{,}675\ + \\ 0{,}3221 \\ \hline 0{,}9971 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}732\ - \\ 0{,}3311 \\ \hline 0{,}4009 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13{,}138\ - \\ 0{,}21 \\ \hline 12{,}928 \end{array}$$

• Per la moltiplicazione il numero delle cifre decimali nel prodotto è dato dalla somma delle cifre decimali del moltiplicando e del moltiplicatore:

$$\begin{array}{l} 0{,}021 \\ 0{,}004 \\ \hline 0{,}000084 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}037 \\ 3 \\ \hline 0{,}111 \end{array}$$

• Per la divisione occorre spostare la virgola di tanti posti verso destra, sia nel dividendo che nel divisore, finchè quest'ultimo non sia più un numero decimale:

$$1{,}2 : 0{,}02 = 120 : 2 = 60$$

6. Rapporti e proporzioni.

• Due grandezze dipendenti una dall'altra si dicono direttamente proporzionali quando con l'aumentare della prima aumenta anche la seconda e col diminuire della prima diminuisce anche la seconda. E precisamente, se la prima diventa doppia, tripla, quadrupla, ecc., anche la seconda diventa doppia, tripla, quadrupla, ecc., o se la prima diventa la metà, la terza parte, ecc., anche la seconda diventa la metà, la terza parte, ecc.
• Due grandezze, dipendenti una dall'altra, sono inversamente proporzionali quando l'aumento del valore di una fa diminuire nella stessa proporzione l'altra: se una si raddoppia l'altra diventa metà, ecc.
• Un numero uguale ad una frazione risulta direttamente proporzionale al numeratore ed inversamente proporzionale al denominatore. Se infatti si raddoppia il numeratore il numero risulta raddoppiato rispetto al valore primitivo, se si raddoppia il denominatore il numero risulta ridotto alla metà:

$$3 = \frac{9}{3};\ 6 = \frac{18}{3};\ 1{,}5 = \frac{9}{6}$$

• Il rapporto fra due numeri dati è il quoziente della loro divisione ed è indicato, normalmente, a mezzo di una frazione, al cui numeratore è posto il primo numero ed al denominatore il secondo.
• Scambiando i termini di un rapporto si ha un nuovo rapporto, inverso o reciproco del primo.

• La proporzione è l'uguaglianza di due rapporti:

$$\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$$

che si usa scrivere più comunemente:

$$15 : 3 = 20 : 4$$

Essa va letta 15 sta a 3 come 20 sta a 4.

• In una proporzione il prodotto dei termini medi è uguale al prodotto dei termini estremi, quindi:

$$3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$$

• Sovente uno dei termini della proporzione non è noto ed allora occorre risolvere la proporzione per trovare il valore del termine incognito, che si può indicare con la lettera x:

$$15 : x = 20 : 4$$

da cui:

$$x \cdot 20 = 15 \cdot 4$$

e dividendo entrambi i membri dell'eguaglianza per 20:

$$x = \frac{15 \cdot 4}{20} = 3$$

• La media aritmetica fra due numeri corrisponde alla metà della loro somma: di 4 e 7 la media aritmetica è $(4 + 7)/2 = 5{,}5$.

• La media geometrica fra due numeri è data dalla radice quadrata del loro prodotto: di 4 e 7 la media geometrica è $\sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{28} = 5{,}29$.

7. Potenze e radici.

• La potenza di un numero è il numero che si ottiene eseguendo tante volte il prodotto di tanti fattori uguali al numero dato quanti indicati dall'esponente: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Il numero che si moltiplica più volte per se stesso è la base, il numero dei fattori del prodotto si chiama esponente o grado della potenza.

• La potenza zero di tutti i numeri, eccetto lo zero, è uguale ad 1, per convenzione.

• La prima potenza di un numero è il numero stesso. La seconda o la terza potenza di un numero si chiamano quadrato o cubo del numero stesso:

$$3^0 = 1;\ 3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81 = \ldots$$

• La potenza di un numero decimale, inferiore ad 1, è sempre minore del numero stesso:

$$0{,}23^2 = 0{,}0529$$

• La potenza di una frazione è una frazione che ha per numeratore la potenza del numeratore e per denominatore quella del denominatore:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

• Il prodotto di più potenze della stessa base è una potenza della stessa base che ha per esponente la somma degli esponenti:

$$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7; \quad 10^{-4} \cdot 10^2 = 10^{-4+2} = 10^2$$

• La potenza di una potenza è uguale alla potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti:

$$(3^3)^3 = 3^{3.3} = 3^9$$

• La potenza negativa di un numero rappresenta, per convenzione, la frazione che ha per numeratore l'unità e per denominatore la stessa potenza con esponente positivo:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}; \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{-2^3} = -\frac{1}{8}; \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001;$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}; \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \quad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}; \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81};$$

$$3 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot \frac{1}{10^4} = 0{,}0003$$

• Il quoziente di due potenze della stessa base è una potenza della stessa base che ha per esponente la differenza fra gli esponenti del dividendo e del divisore:

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^7\,\frac{1}{3^5} = 3^7 \cdot 3^{-5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9;$$

$$\frac{2^4}{2^6} = 2^4\,\frac{1}{2^6} = 2^4 \cdot 2^{-6} = 2^{4-6} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{10^3}{10^6} = 10^{3-6} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

• Il quadrato della somma di due numeri è uguale al quadrato del primo numero, più il doppio del prodotto del primo per il secondo numero, più il quadrato del secondo:

$$(3 + 7)^2 = (3 + 7)(3 + 7) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 7 =$$
$$= 3^2 + 2(3 \cdot 7) + 7^2 = 100$$

Questo risultato è illustrato geometricamente in fig. 1: in essa si è costruito un quadrato i cui lati sono lunghi ognuno 3 + 7 cm e la cui superficie è di 100 cm², somma della superficie dei due quadrati e dei due rettangoli, i cui valori sono dati dalle potenze o dai prodotti indicati internamente ad essi.

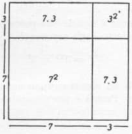


Fig. 1.

• Il quadrato della differenza di due numeri è uguale al quadrato del primo, meno il doppio del prodotto del primo per il secondo, più il quadrato del secondo:

$$(7 - 3)^2 = (7 - 3)(7 - 3) = 7 \cdot 7 - 7 \cdot 3 - 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3 =$$
$$= 7^2 - 2(7 \cdot 3) + 3^2 = 16$$

• Il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza è uguale al quadrato del primo meno il quadrato del secondo:

$$(7 + 3)(7 - 3) = 7^2 - 21 + 21 - 3^2 = 7^2 - 3^2 = 40$$

• La radice quadrata di un numero è quel numero che, elevato al quadrato, riproduce il numero dato:

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt{4} = 2$$

L'espressione $\sqrt{4}$ è detta radicale; il segno particolare sotto cui è scritto il numero è detto segno di radice; il numero scritto sotto di esso è il radicando; il piccolo numero in alto a sinistra è l'indice del radicale o esponente. Questo ultimo non va scritto se la radice è quadrata $\sqrt{4}$; lo è se la radice è cubica $\sqrt[3]{27}$.

• Per estrarre la radice quadrata da un numero si opera come è mostrato nell'esempio seguente per il numero 78 645,035.

Si scompone il numero dato, detto radicando, in gruppi di due cifre, tenendo presente che, dopo la virgola, ai numeri decimali si possono aggiungere quanti zero si vogliono senza alterare il valore del numero dato:

I	II	III	IV	V
7	86	45 ,	03	50

A destra della virgola sono tre cifre, si è aggiunto uno zero per ottenere due gruppi di due cifre, mentre il gruppo più a sinistra, il primo, può essere di una o due cifre.

Si scrive sotto il segno di radice il numero scomposto in gruppi, che sono indicati dai punti superiori.

La prima cifra della radice è data dalla radice quadrata intera del primo gruppo, cioè dal più grande numero il cui quadrato sia uguale o più piccolo del numero formante il primo gruppo.

Nell'esempio 2 è il maggior numero il cui quadrato risulti più piccolo di 7 e lo si scrive in alto a destra. Il quadrato di 2 va sottratto da 7 e si ottiene per resto 3.

Accanto al resto 3 si scrive il secondo gruppo cioè 86, formando il numero 386, e si separa l'ultima cifra 6 mediante un punto superiore.

Si divide il 38 per il doppio della prima cifra di radice, cioè $38 : 4 = 9$. Il quoziente di questa divisione può essere o la seconda cifra della radice che si cerca o una cifra più elevata.

Per controllare ciò si scrive accanto al doppio della prima cifra della radice, 4, il quoziente 9 e si moltiplica il numero 49 ottenuto per lo stesso quoziente 9: il prodotto risultante, 441, è maggiore di 386 quindi 9 è una cifra troppo elevata.

Ripetendo la moltiplicazione con 8 si ha 384 che può essere sottratta da 386 con il resto di 2.

Il numero 8 è la seconda cifra della radice quadrata e va scritto in alto a destra, di seguito al 2.

Per la determinazione della terza cifra della radice si abbassa, accanto al resto 2 il gruppo 45. Effettuato il doppio delle due prime cifre della radice si ha 56 che moltiplicato per qualsiasi numero dà sempre un risultato maggiore di 245. Occorre moltiplicare per 0 per ottenere il risultato 0 e 0 è la terza cifra della radice.

Da 245 va sottratto 0 e si abbassa il quarto gruppo di cifre del radicando, 03.

Effettuato il doppio di 280, 560, si moltiplica questo numero per vari valori sino ad avere un risultato inferiore a 24503, e ciò si ottiene moltiplicandolo per 4: questo numero costituisce la quarta cifra della radice, che va però preceduta dalla virgola perchè lo era anche il gruppo di cifre 03 del radicando.

Per la determinazione delle altre cifre della radice si ripete lo stesso procedimento. Volendo continuare, per ottenere una radice che più si approssimi al valore esatto, basta scrivere accanto all'ultimo resto 40 501 un gruppo di due 0 e ripetere le stesse operazioni nello stesso ordine. Nell'esempio attuale si è giunti ai centesimi cioè si è ottenuto un risultato vicino al valore reale con un'approssimazione molto maggiore di quella necessaria per i comuni calcoli radiotecnici.

$\sqrt{7 \cdot 86 \cdot 45{,}03 \cdot 50}$	280,43
4	
38·6	$49 \cdot 9 = 441$
384	$48 \cdot 8 = 384$
24·5	$560 \cdot 0 = 0$
0	
2450·3	$5604 \cdot 4 = 22416$
22416	
208750	$56084 \cdot 4 = 224336$
168249	$56083 \cdot 3 = 168249$
40501	

- La radice quadrata di un numero decimale inferiore ad 1 è sempre maggiore del numero stesso.
- Per la determinazione della radice quadrata di un numero decimale di valore inferiore ad 1 si procede allo stesso modo aggiungendo, se occorre, uno zero a destra del numero dopo la virgola, per ottenere gruppi di due cifre.

Così per la radice quadrata di 0,058 si ottiene:

$\sqrt{0{,}05 \cdot 80}$	0,2408
4	
18·0	$44 \cdot 4 = 176$
176	
40·0	$480 \cdot 0 = 0$
0	
4000·0	$4809 \cdot 9 = 43281$
38464	$4808 \cdot 8 = 38464$
1536	

La radice così calcolata è approssimata a meno di 0,0001.

TABELLA II.

Quadrati e radici quadrate.

n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1,000	41	1681	6,4031	81	6561	9,0000
2	4	1,414	42	1764	6,4807	82	6724	9,0554
3	9	1,732	43	1849	6,5574	83	6889	9,1104
4	16	2,000	44	1936	6,6332	84	7056	9,1652
5	25	2,236	45	2025	6,7082	85	7225	9,2195
6	36	2,449	46	2116	6,7823	86	7396	9,2736
7	49	2,646	47	2209	6,8557	87	7569	9,3274
8	64	2,828	48	2304	6,9282	88	7744	9,3808
9	81	3,000	49	2401	7,0000	89	7921	9,4340
10	100	3,162	50	2500	7,0711	90	8100	9,4868
11	121	3,3166	51	2601	7,1414	91	8281	9,5394
12	144	3,4641	52	2704	7,2111	92	8464	9,5917
13	169	3,6056	53	2809	7,2801	93	8649	9,6437
14	196	3,7417	54	2916	7,3485	94	8836	9,6954
15	225	3,8730	55	3025	7,4162	95	9025	9,7468
16	256	4,0000	56	3136	7,4833	96	9216	9,7980
17	289	4,1231	57	3249	7,5498	97	9409	9,8489
18	324	4,2426	58	3364	7,6158	98	9604	9,8995
19	361	4,3589	59	3481	7,6811	99	9801	9,9499
20	400	4,4721	60	3600	7,7460	100	10000	10,0000
21	441	4,5826	61	3721	7,8102	101	10201	10,0499
22	484	4,6904	62	3844	7,8740	102	10404	10,0995
23	529	4,7958	63	3969	7,9373	103	10609	10,1489
24	576	4,8990	64	4096	8,0000	104	10816	10,1980
25	625	5,0000	65	4225	8,0623	105	11025	10,2470
26	676	5,0990	66	4356	8,1240	106	11236	10,2956
27	729	5,1962	67	4489	8,1854	107	11449	10,3441
28	784	5,2915	68	4624	8,2462	108	11664	10,3923
29	841	5,3852	69	4761	8,3066	109	11881	10,4403
30	900	5,4772	70	4900	8,3666	110	12100	10,4881
31	961	5,5678	71	5041	8,4261	111	12321	10,5357
32	1024	5,6569	72	5184	8,4853	112	12544	10,5830
33	1089	5,7446	73	5329	8,5440	113	12769	10,6301
34	1156	5,8310	74	5476	8,6023	114	12996	10,6771
35	1225	5,9161	75	5625	8,6603	115	13225	10,7238
36	1296	6,0000	76	5776	8,7178	116	13456	10,7703
37	1369	6,0828	77	5929	8,7750	117	13689	10,8167
38	1444	6,1644	78	6084	8,8318	118	13924	10,8628
39	1521	6,2450	79	6241	8,8882	119	14161	10,9087
40	1600	6,3246	80	6400	8,9443	120	14400	10,9545

• La potenza frazionaria di un numero rappresenta la radice del numero stesso; l'esponente del radicale è indicato dal denominatore della frazione, il numeratore è l'esponente del radicando:

$$9^{1/2} = \sqrt{9} = 3;\ 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3;\ 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2{,}82;$$

$$10^{1/2} = \sqrt{10} = 3{,}16;\ 10^{2/2} = 10^1 = 10;\ 10^{3/2} = \sqrt{10^3} = 31{,}62;$$

$$3^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ 3^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$$

• Se al denominatore di una frazione vi è una potenza con esponente negativo si può portarla al numeratore cambiandone il segno, oppure viceversa:

$$\frac{1}{10^{-6}} = 10^6;\ \frac{1}{3{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{3{,}5} \quad \text{infatti} \quad \frac{1}{3{,}5 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{\frac{3{,}5}{10^3}} = \frac{10^3}{3{,}5}$$

Tabella III.

Potenze di 10.

$10^1 = 10$	$10^0 = 1$	$10^{-1} = 0{,}1$
$10^2 = 100$		$10^{-2} = 0{,}01$
$10^3 = 1000$		$10^{-3} = 0{,}001$
$10^4 = 10000$		$10^{-4} = 0{,}0001$
$10^5 = 100000$		$10^{-5} = 0{,}00001$
$10^6 = 1000000$		$10^{-6} = 0{,}000001$

• La radice di un prodotto di due o più fattori è uguale al prodotto delle radici dei singoli fattori:

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16}\,\sqrt{5} = 4\,\sqrt{5} = 4 \cdot 2{,}236 = 8{,}944;$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{3} = 2\,\sqrt[3]{3} = 2 \cdot 1{,}442 = 2{,}884$$

e viceversa il prodotto di due o più radicali dello stesso indice è uguale alla radice del prodotto dei radicandi.

• La radice di un quoziente è uguale al quoziente delle radici:

$$\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{1{,}41}{3}$$

• Quando si hanno frazioni con radicali al denominatore è utile trasformarle in altre uguali, che non contengano alcun radicale al denominatore, cioè il denominatore va razionalizzato. Se il denominatore è costituito solo dalla radice è sufficiente moltiplicare il numeratore ed il denominatore per la radice stessa:

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{7 \cdot 1{,}73}{3} = 4{,}03;$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{9}}{\sqrt{9}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 9}}{9} = \frac{\sqrt{54}}{9} = \frac{7{,}34}{9} = 0{,}81$$

• Per razionalizzare il denominatore di una frazione, costituito da due termini, se ne moltiplicano il numeratore ed il denominatore per il coniugato del denominatore, cioè per lo stesso denominatore con il segno di somma (o di sottrazione) cambiato in quello di sottrazione (o di somma):

$$\frac{7}{3-\sqrt{3}} = \frac{7\,(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})\,(3+\sqrt{3})} = \frac{7\,(3+1{,}73)}{(3-1{,}73)\,(3+1{,}73)} =$$

$$= \frac{7 \cdot 4{,}73}{1{,}27 \cdot 4{,}73} = \frac{33{,}11}{6} = 5{,}51;$$

$$\frac{7}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{7\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{7\,(1{,}73-1{,}41)}{(1{,}73+1{,}41)\,(1{,}73-1{,}41)} =$$

$$= \frac{2{,}24}{1} = 2{,}24$$

8. Semplificazioni nei calcoli.

• Nei calcoli radiotecnici si fa uso normalmente di numeri molto grandi o molto piccoli ma è sufficiente che essi constino di tre sole cifre significative, siano queste seguite o precedute da molti zeri. Per semplificare i calcoli è bene seguire le seguenti norme.

Scrivere il numero in modo da farlo risultare di valore inferiore a 10; moltiplicarlo per 10 elevato ad una potenza il cui esponente indica di quante cifre occorre spostare la virgola per riottenere il numero originale: $285\,000 = 2{,}85 \cdot 10^5$; $1\,000\,000 = 10^6$; $0{,}000013 = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$.

• I numeri molto grandi o molto piccoli, scritti in tale modo, offrono una grande semplificazione per l'esecuzione di moltiplicazioni e divisioni.

Per la moltiplicazione di due numeri seguiti da potenze di 10 si effettua prima la moltiplicazione dei numeri e si fa seguire al prodotto 10 elevato ad una potenza somma delle potenze dei 10:

$$(2 \cdot 10^3)\,(5{,}7 \cdot 10^4) = (2 \cdot 5{,}7)\,10^7 = 11{,}4 \cdot 10^7;$$

$$(3 \cdot 10^{-5})\,(7 \cdot 10^3) = (3 \cdot 7)\,10^{-2} = 0{,}21$$

• Per la divisione si effettua prima la divisione dei numeri ed al quoziente si fa seguire 10 elevato ad una potenza differenza delle potenze dei 10:

$$(4{,}6 \cdot 10^5)/(2 \cdot 10^3) = (4{,}6/2)\, 10^2 = 2{,}3 \cdot 10^2 = 230;$$

$$(110 \cdot 10^5)/(5 \cdot 10^{-3}) = (110/5)\, 10^8 = 22 \cdot 10^8;$$

$$\frac{3 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^3} = \frac{3 \cdot 10^3}{12 \cdot 7 \cdot 10^{-3}} = \frac{3 \cdot 10^6}{12 \cdot 7} = 0{,}0357 \cdot 10^6 = 35\,700;$$

$$\frac{5 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = \frac{5 \cdot 10^5}{3 \cdot 4 \cdot 10^4} = \frac{5 \cdot 10}{3 \cdot 4} = 4{,}16;$$

$$\frac{2{,}6 \cdot 0{,}047 \cdot 0{,}31}{6{,}28 \cdot 78{,}2 \cdot 0{,}02} = \frac{2{,}6 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}1 \cdot 10^{-1}}{6{,}28 \cdot 7{,}82 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = \frac{2{,}6 \cdot 4{,}7 \cdot 3{,}1}{6{,}28 \cdot 7{,}82 \cdot 2}\,\frac{10^{-3}}{10^{-1}}$$

$$= \frac{37{,}88 \cdot 10^{-2}}{49{,}50} = 0{,}0077;$$

$$\frac{(1{,}41 \cdot 10^5)^2\,(5 \cdot 10^{-2})^2}{10} = \frac{2 \cdot 10^{10} \cdot 25 \cdot 10^{-4}}{10} = \frac{50 \cdot 10^6}{10} = 5 \cdot 10^6$$

• Per semplificare l'estrazione delle radici quadrate si arrotonda il valore del radicando a tre cifre significative e si pone il numero sotto forma di potenza del 10. Dividendo per due l'esponente di quest'ultima potenza se ne ha l'estrazione di radice e resta da estrarre la radice da un numero di tre cifre:

$$\sqrt{1\,000\,000} = \sqrt{10^6} = 10^3; \quad \sqrt{800} = \sqrt{8 \cdot 10^2} = \sqrt{8} \cdot 10 = 28{,}2;$$

$$\sqrt{285\,000} = \sqrt{2{,}85 \cdot 10^5} = \sqrt{28{,}5 \cdot 10^4} = \sqrt{28{,}5} \cdot 10^2 = 535;$$

$$\sqrt{0{,}006 \cdot 0{,}28} = \sqrt{6 \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-1}} = 10^{-2}\sqrt{16{,}8} = 0{,}041;$$

$$\frac{\sqrt{3180}}{\sqrt{227\,000}} = \frac{\sqrt{3{,}18 \cdot 10^3}}{\sqrt{2{,}27 \cdot 10^5}} = \frac{\sqrt{3{,}18}\,\sqrt{10^3}}{\sqrt{2{,}27 \cdot 10^2}\,\sqrt{10^3}} = \frac{\sqrt{3{,}18}}{\sqrt{227}} = \frac{1{,}78}{15} = 0{,}118;$$

$$\frac{1}{3\sqrt{221 \cdot 10^{-12}}} = \frac{1}{3\sqrt{2{,}21 \cdot 10^2 \cdot 10^{-12}}} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-5}\sqrt{2{,}21}} = \frac{10^5}{3\sqrt{2{,}21}} =$$

$$= \frac{10^5}{4{,}47} = 22\,400$$

• Un altro metodo per semplificare i calcoli con i numeri di molte cifre è di far uso di adatte unità di misura: 10 000 g = 10 kg. Si fa uso cioè di prefissi al nome delle unità, indicanti la potenza decimale per cui l'unità di misura va moltiplicata o divisa. La tabella seguente è uno specchietto di tali prefissi.

TABELLA IV.

Prefissi alle unità di misura.

T = tera	= trilione		= 10^{12}	c = centi	= 0,01		= 10^{-2}
G = giga	= miliardo		= 10^{9}	m = milli	= 0,001		= 10^{-3}
M = mega	= 1 000 000		= 10^{6}	μ = micro	= 0,000001		= 10^{-6}
ma = miria	= 10 000		= 10^{4}	n = nano o millimicro			= 10^{-9}
k = kilo	= 1000		= 10^{3}	$\mu\mu$ o p = micromicro o pico			= 10^{-12}
h = etto	= 100		= 10^{2}	f = femto			= 10^{-15}
da = deca	= 10		= 10	a = atto			= 10^{-18}
d = deci	= 0,1		= 10^{-1}				

Per il passaggio da una unità di misura all'altra si può far uso dei fattori di molteplicità della tabella V.

TABELLA V.

Fattori di molteplicità per le unità di misura.

Moltiplicare → per ottenere ↓	Mega M	kilo k	unità	deci d	centi c	milli m	micro μ	nano n	pico p
	per	per	per	per	per	per	per	per	per
mega ..	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
kilo	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
unità ..	10^{6}	10^{3}	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
deci ...	10^{7}	10^{4}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}
centi ...	10^{8}	10^{5}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-4}	10^{-7}	10^{-10}
milli ...	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
micro ..	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}
nano ...	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}
pico ...	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1

TABELLA VI.

Numeri notevoli.

Simbolo	Valore	Quadrato del valore	Simbolo	Valore	Quadrato del valore
$\sqrt{2}$	1,414	2	$\frac{\pi}{3}$	1,047	1,081
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,707	0,5	π^2	9,869	97,409
$\sqrt{3}$	1,732	3	$4\pi^2$	39,47	1557
$\frac{1}{\sqrt{4}}$	0,577	0,333	ε	2,718	7,389
π	3,141	9,859	$\sqrt{5}$	2,236	5
2π	6,283	39,478	$\sqrt{10}$	3,162	10
$2\pi\,50$	314,16	98696	$\sqrt[3]{2}$	1,260	1,587
$\frac{1}{\pi}$	0,318	0,101	$\sqrt[3]{3}$	1,442	2,079
$\frac{2}{\pi}$	0,636	0,405	$\sqrt[3]{4}$	1,587	2,518
$\frac{\pi}{2}$	1,570	2,467	$\sqrt[3]{5}$	1,710	2,924

CAPITOLO II

ALGEBRA

9. Simboli algebrici.

• Su di una linea retta si segni un punto, fig. 2: a partire da questo essa si prolunga all'infinito sia in un senso che nell'altro. Al punto si assegni il valore zero e si tracci, sia in un senso che nell'altro, una serie infinita di punti ad uguali distanze, ad ognuno dei quali si dia un numero progressivo. Partendo dallo zero i numeri segnati verso destra, guardando la retta, sono considerati positivi, quelli verso sinistra negativi. Per distinguerli si premette il segno + a quelli positivi, più grandi di zero, ed il segno — a quelli negativi, più piccoli di zero.

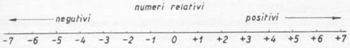


Fig. 2.

Il concetto di numero negativo è facilmente compreso quando lo si riferisce alle temperature: si hanno temperature al disopra ed al disotto dello zero, cioè valori della temperatura positivi e negativi: $-10°$, cioè dieci gradi sotto zero, è un valore chiaramente definito. Nel caso delle correnti elettriche una corrente negativa ha una direzione opposta a quella stabilita come direzione positiva.

• I numeri positivi e i numeri negativi costituiscono le classi dei numeri relativi. Facendo astrazione dal segno di un numero relativo il numero ordinario che rimane si chiama valore assoluto del numero.

• Di due numeri positivi è maggiore quello che ha un valore assoluto maggiore: $+5 > +2$; di due numeri negativi è maggiore quello che ha un valore assoluto minore: $-2 > -5$.

• Due numeri relativi sono opposti se hanno uguale valore assoluto e segno contrario: $+3$, -3.
• Un numero relativo si dice inverso o reciproco di un altro se ha lo stesso segno di questo ma il suo valore assoluto è il reciproco di questo:

$$-3,\ -\frac{1}{3};\ -\frac{3}{4},\ -\frac{4}{3};\ +2,\ +\frac{1}{2}$$

• Nei calcoli algebrici i numeri relativi sono indicati generalmente facendo uso di lettere precedute dal segno che loro compete. Si possono in seguito sostituire alle lettere i numeri relativi su cui interessa operare.
• Il segno $+$ innanzi ad un numero positivo può essere omesso; si ritiene sempre positivo qualsiasi numero innanzi a cui non è indicato alcun segno.
• L'espressione algebrica o letterale è un insieme di lettere, o di numeri (detti coefficienti) e lettere, uniti dai segni delle operazioni:

$$+4a-3b+2c$$

• Quando non si conoscono i valori delle lettere costituenti un'espressione non si possono eseguire le operazioni indicate e non si può trovare il valore dell'espressione; si possono eventualmente eseguire delle trasformazioni per rendere l'espressione più semplice.
• I segni delle operazioni sono indicati ugualmente nelle espressioni algebriche e in quelle aritmetiche; quasi sempre si omette il segno della moltiplicazione: è sufficiente scrivere due lettere di seguito, o un numero ed una lettera, per indicare che essi vanno moltiplicati fra loro. Qualche volta, per eliminare delle ambiguità, si mette inferiormente fra le lettere un punto; non si adopera mai il comune segno di moltiplicato perchè esso può confondersi con la lettera x minuscola.
• Nelle formule che si studiano in radiotecnica si fa quasi sempre uso di lettere maiuscole; esse sono i simboli delle grandezze elettriche che interessano ed i cui valori vanno sostituiti nelle formule, quando si deve ottenere una particolare risoluzione numerica.

Qualche volta alle lettere si fa seguire un piccolo numero in basso o una piccola lettera: si distinguono così valori differenti della stessa grandezza, facendo sempre uso della stessa lettera. Il numero, o lettera, scritto piccolo in basso si chiama indice: A_1, A_2, A_3 vanno letti A con uno, A con due, A con tre.

A volte si fanno seguire alle lettere, in alto, una o più virgolette: A', A'', A'''... Le virgolette sono chiamate apici e le lettere vanno lette A primo, A secondo, A terzo...

10. Operazioni algebriche.

• La somma di due numeri relativi, aventi lo stesso segno, è un numero relativo che ha per valore assoluto la somma dei due valori assoluti e per segno quello dei numeri stessi:

$$+3+11=+14;\ (-2)+(-7)=-2-7=-9$$

• La somma di due numeri relativi, aventi segni contrari, è un numero relativo che ha per valore assoluto la differenza dei due valori assoluti e per segno il segno del numero che ha maggiore valore assoluto:

$$(-9)+(+11)=+2;\ (-11)+(+9)=-2$$

In particolare la somma di due numeri uguali di valore assoluto, ma di segno contrario, numeri opposti, è uguale a zero:

$$(+7)+(-7)=+7-7=0$$

• La somma di tre o più numeri relativi si ottiene aggiungendo alla somma dei primi due il terzo, a quella dei primi tre il quarto e così via, tenendo presente le regole su esposte:

$$(+3)+(-4)+(+5)=(-1)+(+5)=+4$$

• Se i numeri da sommare sono frazionari si riducono prima i loro valori assoluti allo stesso denominatore, quindi si sommano algebricamente i numeratori e si dà per denominatore il denominatore comune. Il segno della frazione è quello che risulta dalla somma dei numeratori:

$$\frac{7}{3}-\frac{3}{5}=\frac{35}{15}-\frac{9}{15}=\frac{26}{15};\ -\frac{3}{5}-\frac{7}{8}=\frac{-24}{40}-\frac{35}{40}=-\frac{59}{40}$$

• Quando si ha un'espressione contenente delle somme algebriche, poste fra parentesi di tipo diverso, queste potranno essere eliminate, o disciolte, eseguendo le varie operazioni, avendo l'avvertenza di cominciare dalle parentesi poste all'interno:

$$\{+3+[(+4)+(-7)]\}=+3+(-3)=0$$

• Se una parentesi è preceduta dal segno — significa che ogni quantità contenuta in essa va cambiata di segno nell'eseguire le operazioni, cioè ognuna di dette quantità va moltiplicata per — 1 prima di eseguire le operazioni. Si possono eseguire prima le operazioni indicate nella parentesi e poi cambiare di segno il risultato:

$$2-(3+7)=2+(-3-7)=2+(-10)=2-10=-8$$

• Per sottrarre fra loro due numeri relativi si aggiunge al primo numero il secondo, col segno cambiato, riportandosi così l'operazione ad una somma algebrica:

$$(+5)-(+3)=(+5)+(-3)=+2;$$
$$(+5)-(-3)=(+5)+(+3)=+8$$

• Il prodotto di due numeri relativi è un numero relativo che ha per valore assoluto, il prodotto dei due valori assoluti e per segno quello positivo se i due numeri hanno segno uguale, quello negativo se hanno segni diversi:

$$(+3)(-4)=-12;\ (-2)(-8)=+16$$

• Il prodotto di più numeri relativi si ottiene moltiplicando il primo numero per il secondo, il risultato per il terzo e così via:

$$(+5)(-4)(-7) = (-20)(-7) = +140$$

• Il prodotto di due numeri reciproci è l'unità positiva:

$$(-3)\left(-\frac{1}{3}\right) = +1$$

• Per moltiplicare un numero relativo per un prodotto è sufficiente moltiplicare il numero per uno solo dei fattori del prodotto:

$$3\,[(-2)(+6)] = (-6)(+6) = -36$$

• Per moltiplicare un numero relativo per una somma si moltiplica quel numero per ciascun termine della somma e quindi si sommano i risultati parziali:

$$+3\,(4+7) = (+12) + (+21) = 33; \quad -2\,(-3+7) = 6 - 14 = -8$$

• Per moltiplicare una somma per un'altra si moltiplica ogni termine della prima per tutti i termini della seconda e quindi si sommano i risultati parziali:

$$(+2+6)(+4+9) = +8 + 18 + 24 + 54 = +104$$

• Il quoziente di due numeri relativi è un numero avente, per valore assoluto, il quoziente dei due valori assoluti e per segno quello positivo se i due numeri hanno ugual segno, quello negativo se sono di segno contrario:

$$(-14) : (+7) = -2$$

• Si ottiene lo stesso risultato se si effettua il prodotto del primo numero per l'inverso del secondo:

$$(-14) : (+7) = (-14)\left(\frac{1}{7}\right) = -\frac{14}{7} = -2;$$

$$(-2) : (+2{,}5) = (-2)\left(\frac{1}{2{,}5}\right) = -\frac{2}{2{,}5} = -0{,}8$$

• Per dividere una somma per un numero relativo si divide ogni termine della somma per quel numero e si sommano algebricamente i risultati parziali:

$$(-7+4) : (-2) = +3{,}5 - 2 = +1{,}5$$

• Per dividere un prodotto per un numero relativo è sufficiente dividere uno solo dei fattori del prodotto per il numero:

$$(-5)(+4):(-2)=(-5)(-2)=+10$$

• Quando la base di una potenza è un numero positivo il valore della potenza è positivo:

$$+3^2=+9$$

• Quando la base di una potenza è un numero negativo e l'esponente è pari il valore della potenza è positivo, se l'esponente è dispari il valore della potenza è negativo:

$$-2^2=+4;\quad -2^3=(-2)(-2)(-2)=(+4)(-2)=-8$$

11. Equazioni di 1° grado.

• Il segno di uguaglianza serve a indicare che due espressioni algebriche hanno valore uguale: $3\,a=4\,b$. La parte a sinistra del segno di uguaglianza si chiama primo membro, quella a destra secondo membro. In una delle due espressioni possiamo avere una lettera di cui non si conosce il valore numerico, in tal caso si ha un'equazione ad una incognita:

$$3\,x=4\,b$$

• Avendo i due membri di una uguaglianza uguali valori, la loro differenza è uguale a zero:

$$4\,x=28 \qquad 4\,x-28=0$$

• In un'equazione si può trasportare un termine da un membro all'altro, avendo l'avvertenza di cambiarne il segno:

$$4\,x-28=0 \qquad 4\,x=28$$
$$2\,x+13=0 \qquad 2\,x=-13$$

• Le equazioni di primo grado sono uguaglianze che si verificano solo per un valore particolare dell'incognita. Il valore che soddisfa o risolve l'equazione si chiama radice o soluzione dell'equazione:

$$4\,x-28=0,\ \text{da cui}\ 4\,x=28\ \text{ed}\ x=\frac{28}{4}=7$$

• Se si aggiunge o si toglie una stessa quantità ai due membri di un'equazione si ottiene un'altra equazione equivalente a quella data, cioè che ammette un'uguale soluzione per l'incognita: $4\,x-28+3=3$, ottenuta aggiungendo 3 ai due membri dell'equazione precedente.

• Data un'equazione se in tutti e due i membri vi sono dei termini di uguale valore assoluto e di uguale segno si può sopprimerli, ottenendo un'equazione equivalente alla data:

$$4\,x-28+3=3\ \text{equivale a}\ 4\,x-28=3-3=0$$

• In un equazione si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri per una stessa quantità, diversa da zero e non contenente l'incognita, ottenendo un'altra equazione equivalente alla data: $12x = 74$, equivalente a quella dell'esempio precedente, ottenuta moltiplicandone entrambi i membri per 3.

• Se in un'equazione vi sono espressioni frazionarie si riducono tutti i termini dei due membri ad avere un denominatore comune, che in seguito viene soppresso in tutti i termini, perchè ciò equivale a moltiplicare ambedue i membri per uno stesso valore ch'è appunto il denominatore comune:

$$\frac{4}{7}x = 4, \quad \frac{4}{7}x = \frac{28}{7}, \quad 4x = 28$$

• In un'equazione si possono cambiare i segni a tutti i termini dei due membri senza alterare l'equazione, perchè ciò equivale a moltiplicare i due membri per -1.

• Il procedimento per risolvere un'equazione di 1° grado ad un'incognita si può riassumere come segue:

a) liberare l'equazione dalle parentesi e dai denominatori;

b) separare i termini contenenti l'incognita dai termini noti: i termini contenenti l'incognita si portano al primo membro ed i termini noti al secondo membro;

c) ridurre i termini simili del primo membro, raccogliendo l'incognita a fattor comune, ed eseguire tutte le operazioni possibili nel secondo membro;

d) dividere i due membri dell'equazione per il coefficiente numerico dell'incognita: dopo tale operazione il secondo membro dell'equazione è la soluzione dell'equazione data:

$$\frac{5x-4}{3} = x + 4$$

moltiplicando entrambi i membri per 3:

$$5x - 4 = 3(x + 4), \quad 5x - 4 = 3x + 12, \quad 5x - 3x = 12 + 4$$

$$x(5 - 3) = 16, \quad 2x = 16, \quad x = \frac{16}{2} = 8$$

12. Equazioni a due incognite.

• Un'equazione a più incognite ha infinite soluzioni: $x + y = 12$ ha infinite soluzioni in quanto il numero 12 può essere diviso in infiniti modi in due parti, la cui somma risulti uguale al numero dato:

$$6 + 6 = 12; \quad 5 + 7 = 12; \quad 4{,}5 + 7{,}5 = 12; \quad 4{,}1 + 7{,}9 = 12; \ldots$$

• Se con le due incognite si possono ottenere due equazioni queste costituiranno un sistema, la cui soluzione ammette un unico valore per ognuna delle due incognite:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Per risolvere queste equazioni si ritiene nota una delle incognite. Si ricava da una delle equazioni, ad es. la seconda, $y = 1 - x$; questo valore di y che soddisfa la seconda equazione può essere sostituito nella prima:

$$3x + 4(1 - x) = 1$$

da cui si ricava:

$$3x + 4 - 4x = 1, \; 3x - 4x = 1 - 4$$

$$-x = -3 \text{ ed } x = 3$$

che va sostituito nella seconda equazione:

$$3 + y = 1, \; y = 1 - 3 = -2$$

13. Equazioni di 2° grado.

• Le equazioni di 2° grado risultano nella forma $a x^2 + b x = c$, in cui la incognita x è elevata a quadrato. Può mancare il termine con la x e l'equazione $a x^2 = c$ si risolve come una di primo grado, ricavando il valore di x^2 e poi estraendone la radice quadrata, se tale valore è positivo.

• La formula risolutiva dell'equazione di 2° grado è:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

da cui si rileva che le radici o soluzioni sono due, dati i segni $\pm$ prima del radicale al numeratore del secondo membro. Data l'equazione:

$$2x^2 - 7x - 22 = 0$$

si ha:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 176}}{4} = \frac{7 \pm 15}{4}$$

per cui le soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{7 - 15}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$x_2 = \frac{7 + 15}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

CAPITOLO III

GEOMETRIA

14. Geometria del cerchio e dei triangoli.

• Una circonferenza è divisa in quattro parti uguali da due diametri, tracciati uno orizzontale ed uno verticale. I quattro angoli ch'essi formano sono di 90 gradi ciascuno, perchè una circonferenza può essere divisa in 360 gradi, che servono per la misura degli angoli, fig. 3.

• I multipli del grado sono:

l'angolo retto che equivale a 90 gradi;
l'angolo piatto che equivale a 180 gradi;
l'angolo giro che equivale a 360 gradi.

• I sottomultipli del grado sono:
il minuto primo che equivale ad 1/60 di grado;
il minuto secondo che equivale ad 1/60 di minuto primo.

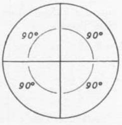


Fig. 3.

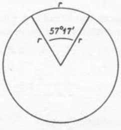


Fig. 4.

• Per indicare che un numero indica gradi, primi o secondi si pone in alto alla sua destra un piccolo zero, un apice, due apici, così: 30° 21′ 15″ si legge 30 gradi, 21 primi e 15 secondi.

- Due angoli la cui somma costituisce un angolo di 90° sono complementari fra loro; se la somma dei due angoli suddetti costituisce un angolo di 180° essi sono supplementari fra loro.
- Vi è un altro modo come misurare gli angoli ed anche per esso si fa uso di una circonferenza. Si prenda su di una circonferenza un arco della stessa lunghezza del raggio e si congiungano gli estremi di questo arco con il centro, a mezzo di due raggi: si ottiene un angolo al centro di 57° 17′ detto radiante, e cioè racchiudente una lunghezza di circonferenza uguale al proprio raggio, fig. 4.
- Dividendo la lunghezza di una circonferenza per la lunghezza del proprio diametro si ottiene approssimativamente il numero 3,14 il cui simbolo è π (*pi* greco). Poichè il raggio è metà del diametro se si effettua la stessa divisione per la lunghezza del raggio si ottiene 6,28 (cioè 2π).

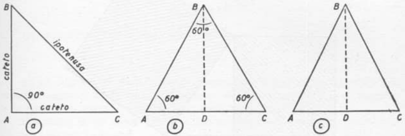


Fig. 5.

- La lunghezza di una circonferenza è data, conoscendo la lunghezza del raggio, da $l = 2\pi r$, cioè in essa sono compresi 2π raggi, ossia 2π radianti.
- La superficie di una circonferenza è data, conoscendo la lunghezza del raggio, da:

$$S = \pi r^2$$

conoscendone il diametro da:

$$S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

- In un quadrato i quattro lati sono tutti uguali fra loro, così pure i quattro angoli retti, la cui somma è di 360°.
- La superficie di un quadrato è data dal prodotto di due lati fra loro e cioè dalla lunghezza di un lato elevata a quadrato.

Un quadrato di un metro di lato ha una superficie: $S = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^2$ e lo stesso quadrato ha una superficie $S = 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = 100 \text{ dm}^2$, oppure $S = 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = 10\,000 \text{ cm}^2$, oppure $S = 1000 \text{ mm} \cdot 1000 \text{ mm} = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$.

• La superficie di un rettangolo è ottenuta moltiplicando la lunghezza del lato di base per l'altezza.

• I tre triangoli in fig. 5 sono detti triangolo rettangolo (*a*), equilatero (*b*) ed isoscele (*c*). In essi la somma degli angoli interni è di 180°.

• Nel triangolo rettangolo l'angolo in *A*, cioè quello individuato dai due lati *AC* ed *AB*, è retto. Questi due lati si chiamano cateti; quello opposto all'angolo in *A*, il lato *CB*, è l'ipotenusa.

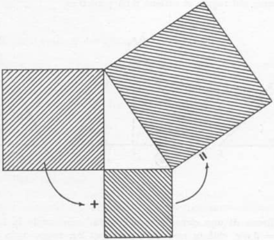


Fig. 6.

• Nel triangolo equilatero i tre lati sono di uguale lunghezza ed i tre angoli sono di uguale ampiezza, di 60° ciascuno.

• Nel triangolo isoscele due soli lati sono uguali fra loro, $AB = BC$.

• La superficie di un triangolo è ottenuta moltiplicando la lunghezza del lato di base per la metà dell'altezza: quest'ultima, nel caso del triangolo rettangolo, è data dalla lunghezza del cateto *AB*, nel caso dei triangoli equilatero o isoscele dalla perpendicolare abbassata dal vertice *B* alla base (linea *BD* tratteggiata).

• Il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo ha una superficie uguale alla somma delle superfici dei quadrati costruiti sui cateti, fig. 6 (teorema di Pitagora).

15. Geometria dei solidi.

- La superficie di un cubo è data da:

$$S = 6\,l^2$$

in cui l è la lunghezza di uno spigolo del cubo.

- Il volume di un cubo è dato dal prodotto della superficie della base (un quadrato) per l'altezza (cioè si moltiplica la lunghezza di un lato tre volte per se stessa o, come si è detto per le potenze, la si eleva a cubo):

$$V = l^3$$

- La superficie laterale di un cilindro è data dal prodotto della lunghezza della circonferenza di base per la lunghezza del cilindro:

$$S_c = 2\,\pi\,r\,l$$

- La superficie totale di un cilindro è data da:

$$S_t = 2\,\pi\,r\,(l + r)$$

Se un cilindro ha raggio doppio e lunghezza doppia di un altro ha una superficie quattro volte maggiore di esso; se risulta doppio solo il raggio o la lunghezza la superficie risulta due volte maggiore.

- Il volume di un cilindro è dato dal prodotto della superficie della base (un cerchio) per l'altezza:

$$V = \pi\,r^2\,l$$

- La superficie di una sfera è data da:

$$S = \pi\,\mathrm{d}^2 = 4\,\pi\,r^2$$

in cui d è il diametro della sfera ed r il suo raggio.

- Il volume di una sfera è dato da:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$$

CAPITOLO IV

TRIGONOMETRIA

16. Trigonometria.

• La trigonometria è quella sezione della matematica che studia le proprietà degli angoli.

• In fig. 7 è disegnata una circonferenza con centro in A. Partendo dal punto O, per cui passa un diametro, il raggio AB, ruotando nel verso della freccia, verso antiorario, descrive con il suo estremo la circonferenza. Dal punto B, in cui è giunto il suo estremo, si abbassa la perpendicolare al diametro AO; si ottiene così il triangolo rettangolo ABC in cui l'angolo in C è retto, di 90°. La somma degli angoli interni di un triangolo è di 180° e gli angoli in A ed in B hanno quindi complessivamente 90°.

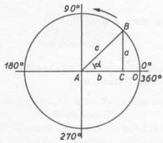


Fig. 7.

I lati opposti agli angoli sono contrassegnati dalla stessa lettera, minuscola, i lati a e b sono i cateti, c è l'ipotenusa.

• In trigonometria sono state stabilite delle relazioni di cui le seguenti, relative all'angolo in A, contrassegnato con la lettera α (alfa minuscola), hanno una grande importanza per la risoluzione di problemi in elettrotecnica:

$$\text{seno di } \alpha = \frac{\text{lunghezza del cateto } a}{\text{lunghezza dell'ipotenusa } c} = \operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\text{coseno di } \alpha = \frac{\text{lunghezza del cateto } b}{\text{lunghezza dell'ipotenusa } c} = \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tangente di } \alpha = \frac{\text{lunghezza del cateto } a}{\text{lunghezza del cateto } b} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Le abbreviazioni sen α, cos α e tg α sono normalmente adoperate. I rapporti suddetti, detti funzioni trigonometriche, hanno un valore numerico determinato per ogni ampiezza dell'angolo, che non varia con le dimensioni del triangolo. Infatti un triangolo rettangolo simile a quello disegnato, cioè con l'angolo α con lo stesso numero di gradi, se più grande ha corrispondentemente più grandi i tre lati ed i rapporti fra le lunghezze relative restano invariati.
Ritenendo di valore unità la lunghezza del raggio della circonferenza, di c, fig. 7, i rapporti precedenti possono essere scritti:

$$\operatorname{sen}\alpha = a; \ \cos\alpha = b; \ \operatorname{tg}\alpha = a/b$$

• Secondo il teorema di Pitagora si può scrivere per il triangolo rettangolo di fig. 7:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

relazione da cui si può ricavare uno dei cateti e cioè:

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ oppure } b^2 = c^2 - a^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ e } b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

• Sostituendo nella prima di queste uguaglianze ad a, b e c quelle del paragrafo precedente si ha:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

da cui:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

e inoltre:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

• Nel triangolo equilatero di fig. 8 *a* i tre lati ed i tre angoli sono uguali. I lati hanno una lunghezza unitaria e gli angoli sono necessariamente di 60° ciascuno. Una linea tracciata dal vertice del triangolo al centro del lato inferiore, fig. 8 *b*, divide il triangolo a metà, ognuna delle quali è un triangolo rettangolo: questo triangolo, fig. 8 *c*, avrà il lato *b* di lunghezza metà di quello *c* e l'angolo in *B* sarà ora di 30°.

Dal teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,73}{2} = 0,87$$

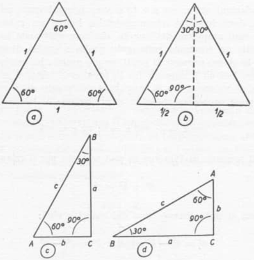


Fig. 8.

Dalla definizione delle funzioni trigonometriche, per l'angolo in *A* risulta:

$$\text{sen } 60° = \frac{a}{c} = \frac{0,87}{1} = 0,87$$

$$\cos 60° = \frac{b}{c} = \frac{½}{1} = 0,50$$

$$\text{tg } 60° = \frac{a}{b} = \frac{0,87}{½} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{½} = \sqrt{3} = 1,73$$

Allo stesso modo si possono ottenere i valori delle funzioni per l'altro angolo acuto, in B, di 30°: i valori di a e b sono già noti, 0,87 e ½; basta riscrivere le frazioni ed ottenere i nuovi valori dei rapporti, fig. 8 d:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{b}{c} = 0{,}50$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a}{c} = 0{,}87$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{b}{a} = 0{,}58$$

• Effettuando questi rapporti per ogni angolo, da 0° a 90°, si ricava la tabella VI. Da essa si rilevano i valori delle funzioni trigonometriche di un angolo di un determinato numero di gradi, o dal valore di una di dette funzioni si può risalire all'angolo che le compete.

• Quando l'angolo è di un dato numero di gradi e di minuti primi si ricorre all'interpolazione. Si deve cioè trovare il valore della funzione relativa ad un angolo dello stesso numero intero di gradi, senza i primi, e quello di un angolo maggiore di un grado. Si fa la differenza fra questi due valori e si ha il valore della funzione trigonometrica relativo a quel grado di differenza fra i due angoli. Questo valore va diviso per 60, quanti sono i minuti primi in un grado, il risultato è moltiplicato per il numero di minuti dell'angolo in questione e questo prodotto va sommato al primo valore dei due rilevati dalla tabella, se la funzione considerata è il seno o la tangente, altrimenti va sottratto dal primo valore per il coseno. Si ha il valore esatto della funzione per l'angolo voluto.

Ad es.: trovare il coseno dell'angolo 20° 30'. Il cos 20° è 0,9397, quello di 21° è 0,9336, dalla loro differenza si ha 0,9397 — 0,9336 = 0,0061 che diviso per 60 dà circa 0,0001 per ogni primo e moltiplicato per 30' dà 0,0030. Questo valore sottratto da 0,9397 dà 0,9367 = cos 20° 30'. In un caso simile è più pratico, tenendo conto che 30' corrispondono a mezzo grado, effettuare la media dei valori dei coseni dei due angoli di 20° e di 21°.

• È utile ricordare che, per angoli molto piccoli, inferiori a 2°, il cui valore sia espresso in radianti, i relativi valori del seno e della tangente sono identici al valore dell'angolo, quello del coseno assume un valore all'incirca unitario.

• Tener presente che $\text{sen}\,\alpha^2$ è il seno del quadrato dell'angolo α, mentre $(\text{sen}\,\alpha)^2$ è il quadrato di $\text{sen}\,\alpha$ (indicato anche con $\text{sen}^2\,\alpha$).

• Altre formule trigonometriche che trovano applicazioni nei calcoli radiotecnici sono:

$$\text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\ \text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\beta$$

Tabella VII.

Radianti, seno, coseno, tangente.

Angolo	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Angolo	Radianti	Seno	Coseno	Tangente
0°	.0000	0.0000	1.000	0.0000	45°	.7854	.7071	.7071	1.0000
1	.0175	.0175	.9998	.0175	46	.8029	.7193	.6947	1.0355
2	.0349	.0349	.9994	.0349	47	.8203	.7314	.6820	1.0724
3	.0524	.0523	.9986	.0524	48	.8378	.7431	.6691	1.1106
4	.0698	.0698	.9976	.0699	49	.8552	.7547	.6561	1.1504
5	.0873	.0872	.9962	.0875	50	.8727	.7660	.6428	1.1918
6	.1047	.1045	.9945	.1051	51	.8901	.7771	.6293	1.2349
7	.1222	.1219	.9925	.1228	52	.9076	.7880	.6157	1.2799
8	.1396	.1392	.9903	.1405	53	.9250	.7986	.6018	1.3270
9	.1571	.1564	.9877	.1584	54	.9425	.8090	.5878	1.3764
10	.1745	.1736	.9848	.1763	55	.9599	.8192	.5736	1.4281
11	.1920	.1908	.9816	.1944	56	.9774	.8290	.5592	1.4826
12	.2094	.2079	.9781	.2126	57	.9948	.8387	.5446	1.5399
13	.2269	.2250	.9744	.2309	58	1.0123	.8480	.5299	1.6003
14	.2443	.2419	.9703	.2493	59	1.0297	.8572	.5150	1.6643
15	.2618	.2588	.9659	.2679	60	1.0472	.8660	.5000	1.7321
16	.2793	.2756	.9613	.2867	61	1.0647	.8746	.4848	1.8040
17	.2967	.2924	.9563	.3057	62	1.0821	.8829	.4695	1.8807
18	.3142	.3090	.9511	.3249	63	1.0996	.8910	.4540	1.9626
19	.3316	.3256	.9455	.3443	64	1.1170	.8988	.4384	2.0503
20	.3491	.3420	.9397	.3640	65	1.1345	.9063	.4226	2.1445
21	.3665	.3584	.9336	.3839	66	1.1519	.9135	.4067	2.2460
22	.3840	.3746	.9272	.4040	67	1.1694	.9205	.3907	2.3559
23	.4014	.3907	.9205	.4245	68	1.1868	.9272	.3746	2.4751
24	.4189	.4067	.9135	.4452	69	1.2043	.9336	.3584	2.6051
25	.4363	.4226	.9063	.4663	70	1.2217	.9397	.3420	2.7475
26	.4538	.4384	.8988	.4877	71	1.2392	.9455	.3256	2.9042
27	.4712	.4540	.8910	.5095	72	1.2566	.9511	.3090	3.0777
28	.4887	.4695	.8829	.5317	73	1.2741	.9563	.2924	3.2709
29	.5061	.4848	.8746	.5543	74	1.2915	.9613	.2756	3.4874
30	.5236	.5000	.8660	.5774	75	1.3090	.9659	.2588	3.7321
31	.5411	.5150	.8572	.6009	76	1.3265	.9703	.2419	4.0108
32	.5585	.5299	.8480	.6249	77	1.3439	.9744	.2250	4.3315
33	.5760	.5446	.8387	.6494	78	1.3614	.9781	.2079	4.7046
34	.5934	.5592	.8290	.6745	79	1.3788	.9816	.1908	5.1446
35	.6109	.5736	.8192	.7002	80	1.3963	.9848	.1736	5.6713
36	.6283	.5878	.8090	.7265	81	1.4137	.9877	.1564	6.3138
37	.6458	.6018	.7986	.7536	82	1.4312	.9903	.1392	7.1154
38	.6632	.6157	.7880	.7813	83	1.4486	.9925	.1219	8.1443
39	.6807	.6293	.7771	.8098	84	1.4661	.9945	.1045	9.5144
40	.6981	.6428	.7660	.8391	85	1.4835	.9962	.0872	11.43
41	.7156	.6561	.7547	.8693	86	1.5010	.9976	.0698	14.30
42	.7330	.6691	.7431	.9004	87	1.5184	.9986	.0523	19.08
43	.7505	.6820	.7314	.9325	88	1.5359	.9994	.0349	28.64
44	.7679	.6947	.7193	.9657	89	1.5533	.9998	.0175	57.29
					90	1.57	1.0000	0	inf.

e le formule di prostaferesi (di addizione e sottrazione):

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

• La trigonometria consente, oltre alla determinazione degli angoli di un triangolo qualunque, quella dei lati, conoscendone tre elementi, di cui almeno un lato.

• Se sono noti due angoli di un triangolo qualunque ed un lato, oppure due lati ed un angolo, non compreso fra i due lati (teorema dei seni) si fa uso delle uguaglianze seguenti:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

in cui α, β e γ sono gli angoli opposti ai lati a, b e c.

• Se di un triangolo qualunque sono noti due lati e l'angolo compreso fra essi (teorema di Carnot) si fa uso delle formule:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

• Le funzioni trigonometriche inverse costituiscono un'abbreviazione grafica di: l'angolo il cui seno è..., oppure, l'angolo il cui coseno è..., oppure, l'angolo la cui tangente è....

Pertanto se: $m = \operatorname{sen}\alpha$, da essa risulta $\alpha = \operatorname{arcsen} m$, cioè α è l'angolo il cui seno ha il valore m.

E così ancora:

$$n = \cos\alpha \qquad \alpha = \arccos n$$

$$t = \operatorname{tg}\alpha \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\ t$$

Per trovare il valore di questo angolo, di cui si conosce il valore della funzione trigonometrica, si individua questo valore sulla colonna corrispondente alla funzione nella tabella VII e si legge in corrispondenza l'angolo. Se il valore è intermedio fra due si suddivide la differenza, fra due valori corrispondenti a due angoli successivi, per 60 minuti primi e si computa di quanti gradi e quanti primi è l'angolo.

In alcuni testi invece delle notazioni delle funzioni inverse arcsen, arccos, arctg si trovano le notazioni sen^{-1}, $\cos^{-1}$, tg^{-1}: va notato che il -1 non è un esponente negativo ma esso indica semplicemente una funzione inversa.

CAPITOLO V

RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE

17. Coordinate cartesiane.

• Si può rappresentare, fissata una unità di misura, ogni numero con un punto su di una retta. Si può con un punto su di un piano rappresentare una grandezza il cui valore dipenda da due grandezze variabili.

• In fig. 9 è illustrato il modo come disporre due rette, ortogonali fra loro, e come effettuarne la suddivisione e l'assegnazione di valori positivi e negativi ai vari punti di esse, per ottenere la rappresentazione grafica, su di un piano, di fenomeni che interessa studiare.

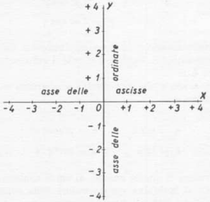


Fig. 9.

La retta orizzontale è detta asse delle ascisse o delle x, quella verticale asse delle ordinate o delle y. Le due rette, dette assi cartesiani, servono ad individuare la posizione di un punto giacente sul piano su cui sono tracciate, mediante una coppia di numeri, detti coordinate del punto.

Nel punto di incrocio si segna il valore zero e a distanze uguali su ogni retta si segnano, a partire dallo zero, verso destra o verso l'alto, i numeri relativi positivi susseguentisi, a partire dallo zero, verso sinistra o verso il basso, quelli negativi. La distanza esistente fra i vari punti segnati su di un asse può essere uguale o diversa da quella dei punti segnati sull'altro asse, ciò per comodità di suddivisione del foglio su cui si sono tracciate le coordinate, per far rientrare in esso tutti i valori che possano essere assunti dalle due grandezze variabili.

Con la costruzione dei due assi si ha la possibilità di tracciare tutti i punti che corrispondono a coppie di valori, segnati su di essi, in uno o più dei quattro quadranti in cui risulta suddiviso il piano.

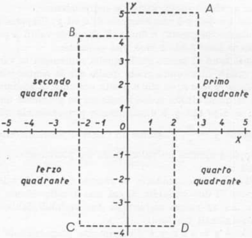


Fig. 10.

Sull'asse x e sull'asse y di fig. 10 sono scelti i due punti 3 e 5 a cui corrisponde sul piano il punto A: i due valori suddetti sono infatti i punti d'incontro delle perpendicolari condotte dal punto A ai due assi cartesiani. Delle coordinate corrispondenti ad un punto va indicata prima quella relativa all'asse delle ascisse, o x, quindi quella relativa all'asse delle ordinate, o y. Il punto $B \equiv (-2{,}4)$ giace in un altro quadrante in quanto l'ascissa è negativa ed esso non può essere confuso con i punti C e D, per cui si hanno le corrispondenze seguenti $C \equiv (-2, \ -4)$ e $D \equiv (2, \ -4)$.

• Se i valori segnati sugli assi sono quelli assunti da due grandezze elettriche, determinati in seguito a misure effettuate su circuiti, si può ricavare, riunendo con una linea curva o spezzata i vari punti tracciati sul piano, una linea che indica con il suo andamento quello di un fenomeno elettrico. Questa linea, sia che risulti una curva, una spezzata o anche una retta, è chiamata curva caratteristica o semplicemente curva.

18. Funzioni.

• Il valore di un'espressione algebrica dipende dai valori che viene ad assumere ognuna delle lettere che la compongono, in quanto ognuna sta ad indicare una grandezza variabile. Se nell'espressione $4\,a^2 - 5$ si dànno ad a valori positivi crescenti, a partire dallo zero, si ha per $a = 0$ un valore di -5, per $a = 1$ un valore di -1, per $a = 2$ un valore di 11, e così via. L'espressione suddetta è detta una funzione di a, in quanto assume valori differenti per differenti valori di a, che è detta variabile indipendente.

L'espressione $4\,x + 3\,y$ è una funzione di x ed y; l'espressione $2\,\pi\,r$ è una funzione di r soltanto, in quanto π non può assumere valori a piacere, ma rappresenta il numero fisso 3,14, è cioè una costante.

• Delle funzioni sono di primo grado quelle contenenti la variabile indipendente al primo grado, di secondo grado quelle che la contengono al quadrato.

• Nell'espressione $y = a\,x$, in cui a è una costante, y assume un valore dipendente da x; se quest'ultima si raddoppia anche y assume un valore doppio del precedente: si dice che y è direttamente proporzionale ad x.

• Nell'espressione $y = \frac{a}{x}$, y assume un valore dipendente da x, ma se questa ultima si raddoppia y assume un valore metà del precedente: y è inversamente proporzionale ad x.

Poichè dall'espressione suddetta si ricava $x\,y = a$ è utile rilevare che quando il prodotto di due variabili, di cui una è indipendente e l'altra è una funzione di essa, ha un valore costante le due variabili debbono risultare inversamente proporzionali fra loro.

• Nell'espressione $y = a\,x\,z$, y è direttamente proporzionale ad x e z. Nell'espressione $y = a\frac{x}{z}$, y è direttamente proporzionale ad x ed inversamente proporzionale a z.

• L'espressione $y = f(x)$ indica che y è funzione di x e quest'ultima è la variabile indipendente.

19. Rappresentazione grafica delle funzioni.

• Le funzioni di primo grado, cioè quelle in cui la x appare alla prima potenza, hanno come diagrammi delle linee rette, se la variabile dipendente assume valori direttamente proporzionali a quelli della variabile indipendente.

• Se la variabile dipendente assume valori inversamente proporzionali a quelli della variabile indipendente il diagramma è rappresentato da una curva particolare.

• Stabilita una funzione, ad es. $y = 2x$, per tracciarne il diagramma si attribuisce ad x tutta una serie di valori, a partire dallo zero, positivi e negativi, e si calcola per ognuno di essi il valore che assume la funzione, compilando una tabella.

Una tabella matematica è una disposizione ordinata dei valori di una funzione corrispondenti a valori determinati della variabile indipendente: questi sono scelti arbitrariamente, sovente ad intervalli uguali.

Per la funzione in esame si compila la tabella seguente e, su di un piano con i due assi cartesiani, si determinano i punti corrispondenti alle successive coppie di numeri, ritenendo il primo come valore dell'ascissa ed il secondo come valore dell'ordinata.

x	y $(2x)$	x	y $(2x)$
0	0	-1	-2
1	2	-2	-4
2	4	-3	-6
3	6	-4	-8

Si ottiene così un diagramma come in fig. 11, dopo aver riunito con una retta i vari punti del piano così determinati.

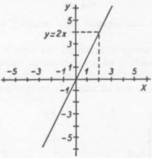


Fig. 11.

• Si consideri la funzione $y = 2x + 3$; ad essa corrispondono la tabella seguente ed il grafico di fig. 12.

x	y $(2x+3)$	x	y $(2x+3)$
0	3	-1	1
1	5	-2	-1
2	7	-3	-3
3	9	-4	-5

Questa funzione assume valori che sono superiori di 3 unità, nel senso dell'asse y, alla funzione precedentemente studiata (il cui diagramma è a punti in fig. 12).

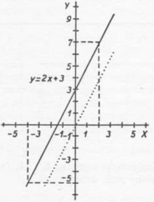


Fig. 12.

Le due funzioni ora considerate sono relative a due grandezze direttamente proporzionali.

• È utile considerare anche espressioni del tipo $x = 2$ ed $y = 2$, che non sono delle funzioni in quanto x ed y risultano di valore costante. La loro rappresentazione grafica è in fig. 13: nella prima x è una costante ed y la variabile indipendente, nella seconda x è la variabile indipendente ed y la costante.

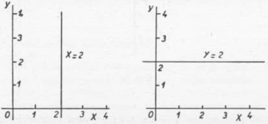


Fig. 13.

• Si consideri ora la funzione $y = \frac{2}{x}$: per essa si ha una proporzionalità inversa fra x ed y.

x	y $\left(\frac{2}{x}\right)$	x	y $\left(\frac{2}{x}\right)$
0,5	4	— 0,5	— 4
1	2	— 1	— 2
2	1	— 2	— 1
3	0,66	— 3	— 0,66

A questa funzione corrisponde una curva che si spezza in due rami, fig. 14, disposti simmetricamente ai due assi cartesiani: questo tipo di diagramma si chiama iperbole.

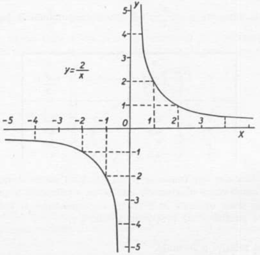


Fig. 14.

• Le funzioni di secondo grado sono quelle in cui la variabile indipendente risulta elevata a quadrato: le curve corrispondenti sono dette parabole, fig. 15.

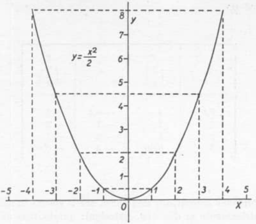


Fig. 15.

Una funzione di secondo grado è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ ma in essa possono mancare i due ultimi termini.

Sia data la funzione $y = \frac{x^2}{2}$; ad essa corrispondono la tabella seguente e la curva suddetta.

x	y $\left(\frac{x^2}{2}\right)$	x	y $\left(\frac{x^2}{2}\right)$
0	0	-1	0,5
1	0,5	-2	2
2	2	-3	4,5
3	4,5	-4	8

• È utile notare che una funzione in cui è la y ad essere elevata a quadrato, non la x, può avere come diagramma una retta, similmente a quella di fig. 11, purchè sull'asse delle ordinate le divisioni corrispondano ai valori di y^2 (non a quelli di y) e purchè y^2 sia proporzionale ad x.

20. Diagrammi relativi a formule.

• Le formule, consentendo il calcolo dei valori di una variabile, in funzione di un'altra o più variabili, possono essere rappresentate graficamente. Considerando la causa che determina l'effetto si ritiene la prima come variabile indipendente, ed i relativi valori sono riportati sull'asse delle ascisse, la seconda come variabile dipendente, ed i relativi valori vanno riportati sull'asse delle ordinate.

- Se nella formula vi è una terza grandezza variabile si possono tracciare più curve, relative a determinati valori assegnati a questa variabile. Si considera cioè questa terza variabile come una costante, per la determinazione dei punti di una sola curva, assegnandole un adatto valore, quindi, variato questo, si procede alla determinazione di un'altra curva caratteristica: in tal caso questa terza variabile è chiamata parametro.

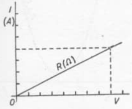


Fig. 16.

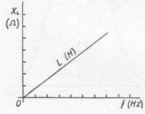


Fig. 17.

- Si può costruire una caratteristica relativa ad una resistenza, secondo la legge di Ohm $I = \frac{V}{R}$, come in fig. 16, dando alla tensione i valori voluti e calcolando i valori delle correnti corrispondenti: la tensione è la variabile indipendente, la corrente è la variabile dipendente, la resistenza è il parametro.

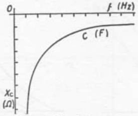


Fig. 18.

Il valore della reattanza di una bobina è dato dalla formula $X = 2\pi f L$, in cui X è espresso in ohm, L in henry ed f in Hz. Il parametro è costituito da L, in quanto si deve costruire il diagramma relativo a quella determinata bobina, la variabile indipendente è f e quella dipendente X: la caratteristica ottenuta è quella di fig. 17. Essa è costituita da una retta poichè l'equazione è di primo grado e la reattanza è direttamente proporzionale alla frequenza.

La caratteristica della reattanza di un condensatore è un ramo di iperbole, fig. 18, perchè l'equazione è di primo grado, $-X = -\dfrac{1}{2\pi f C}$, ma la reattanza è inversamente proporzionale alla frequenza.

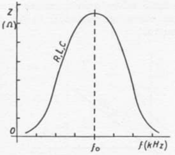


Fig. 19.

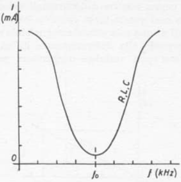


Fig. 20.

La capacità C in farad del condensatore costituisce il parametro dell'equazione.

Ai valori della reattanza capacitiva si attribuisce un segno negativo, per convenzione, per considerarla opposta a quella induttiva.

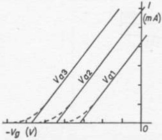


Fig. 21.

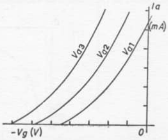


Fig. 22.

La caratteristica della impedenza di un circuito oscillatorio in serie, fig. 19, è ottenuta calcolando, per varie frequenze, il valore dell'impedenza, data da $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, e considerando come parametri le costanti R, L e C del circuito in esame.

Dopo aver compilato la tabella, con tutti i valori dell'impedenza del circuito alle varie frequenze, si può calcolare il valore della corrente che vi circola applicandovi una tensione costante, $I = \frac{V}{Z}$.

Con i valori della corrente così ricavati si traccia un altro diagramma, come quello di fig. 20, in cui i valori della corrente sono indicati sull'asse delle ordinate.

Di un triodo si possono calcolare le caratteristiche mutue a mezzo della formula $I_a = k\,(V_a + \mu\, V_g)^{3/2}$: in questa equazione le variabili sono tre, la I_a, la V_a e la V_g; k è una costante, il cui valore dipende dalla pendenza; anche μ va considerata come una costante.

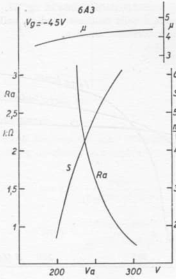


Fig. 23.

Per ogni caratteristica che si vuole ottenere, fig. 21, si stabilisce la tensione di alimentazione anodica V_a, parametro, e la I_a diventa una funzione dipendente solo dalla V_g.

Ogni caratteristica mutua può essere ottenuta anche misurando i valori della corrente anodica corrispondenti alle tensioni di polarizzazione applicate alla griglia, per una determinata tensione anodica, fig. 22.

I diagrammi possono quindi rappresentare fenomeni fisici di cui si siano rilevati i dati sperimentalmente.

Avvalendosi delle formule relative ai parametri di un triodo:

$$R_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} \quad \text{mantenendo } V_g \text{ costante}$$

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} \quad \text{mantenendo } I_a \text{ costante}$$

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} \quad \text{mantenendo } V_a \text{ costante}$$

si possono costruire delle caratteristiche come in fig. 21. ΔV_a, ΔV_g, ΔI_a corrispondono a piccole variazioni nella tensione anodica, nella tensione di polarizzazione di griglia e nella corrente anodica.

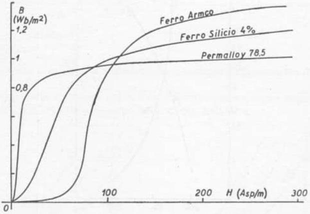


Fig. 24.

I valori relativi vanno determinati considerando piccole zone delle caratteristiche di fig. 22, sia nei tratti rettilinei che in quelli più curvi: si effettua la differenza dei valori estremi corrispondenti a questi piccoli tratti e si ottengono le tre serie di valori con cui tracciare le caratteristiche di fig. 23.

Le caratteristiche di magnetizzazione di alcuni materiali magnetici, fig. 24, sono state ricavate da una serie di misure dell'induzione B, prodotta aumentando man mano l'intensità della magnetizzazione H dei campioni di materiali in esame.

21. Funzioni circolari.

• La misura in gradi dell'angolo α, l'angolo CAB, è uguale a quella dell'arco OB, corrispondente sulla circonferenza di fig. 25, quindi i valori del seno, del coseno e della tangente di detto angolo valgono anche per questo arco.

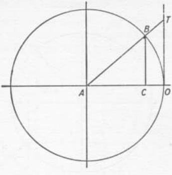


Fig. 25.

Il coseno ed il seno di un arco OB sono le coordinate del suo estremo B; come unità di misura delle lunghezze si adopera il raggio della circonferenza:

$$\cos \alpha = \frac{\text{ascissa}}{\text{raggio unitario}}$$

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{\text{ordinata}}{\text{raggio unitario}}$$

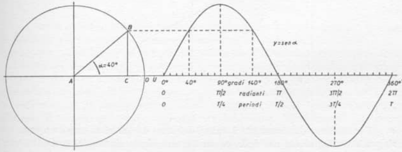


Fig. 26.

La tangente di un arco OB è l'ordinata del punto T, in cui la tangente alla circonferenza, passante per l'origine O dell'arco, è incontrata dal prolungamento del raggio, che passa per l'estremo B dell'arco.

Per le relazioni precedenti:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{ordinata}}{\text{ascissa}}$$

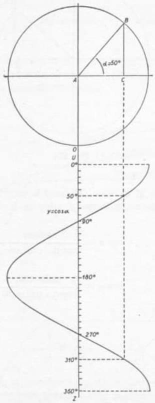


Fig. 27.

• Per ottenere graficamente i valori del seno di qualsiasi angolo o arco corrispondente si può far uso della curva dei seni, detta sinusoide, costruita com'è rappresentato in fig. 26. Si tracci una retta UZ, centro in un punto A si descriva una circonferenza, il cui raggio è considerato come unità di misura; a poca distanza da questa, dal punto 0°, si traccino sulla retta tanti punti a distanze uguali, quante sono le parti in cui si vuole dividere la circonferenza, ad es. 36, in modo che ad ogni punto dopo lo 0° corrispondano 10° della circonferenza. Se si traccia il triangolo ABC, chiamando α l'angolo in A di 40°, risulta $\operatorname{sen}\alpha = \frac{BC}{AB}$, ma AB è di lunghezza unitaria quindi $\operatorname{sen}\alpha = BC$. Si tracci per il punto B una parallela ad UZ e, per il punto relativo a 40°, si innalzi una verticale, sino ad incontrare questa parallela. Ripetendo queste operazioni per angoli crescenti di 10° in 10° si ha tutta una serie di punti di incrocio.

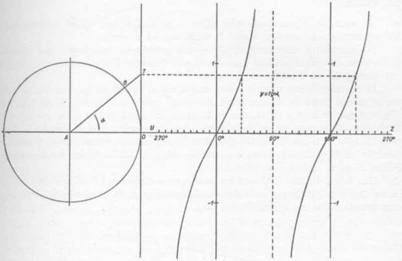


Fig. 28.

Sino a 90° si debbono tracciare tante parallele all'asse UZ, ma dopo tale valore le parallele già tracciate servono ugualmente per i punti da 90° a 180°: è sufficiente per questi innalzare le verticali dalla retta UZ. Continuando l'operazione di tracciatura da 180° a 270° si ha una serie di parallele da utilizzare anche per gli angoli da 270° a 360°. Riunendo i punti di incrocio con una linea curva, raccordata in modo adatto, si ottiene la curva dei seni con cui si può, elevando la verticale per il punto corrispondente all'angolo che si vuole considerare, ottenere il valore del seno, misurando la lunghezza del segmento compreso fra UZ e la sinusoide. Si nota così che un angolo di 120° ha lo stesso valore del seno di uno di 60°, che un angolo di 200° ha un valore negativo del seno, uguale a quello di un angolo di 340°.

Se invece del segmento BC, di fig. 25, si considera il segmento AC si può costruire la curva dei coseni, fig. 27, con un procedimento analogo perchè $\cos\alpha = AC$. Tracciando per ogni valore angolare una verticale per ogni punto, a partire da 0°, di lunghezza uguale al corrispondente segmento AC, si ottiene una curva in tutto uguale a quella già tracciata per il seno, ma spostata rispetto questa di 90° (quando il seno ha il valore 0 il coseno lo ha di 1 e viceversa).

Dalla fig. 28 si rileva la costruzione del diagramma relativo alla tangente, il cui valore è dato, per ogni angolo, dalla lunghezza del segmento OT, determinato dal prolungamento del raggio AB fino all'incontro con la tangente alla circonferenza nel punto O.

22. Vettori.

- Vi sono delle grandezze che, oltre a possedere un valore o ampiezza, hanno altre caratteristiche e cioè la direzione ed il verso.

La meccanica offre un esempio di tali grandezze, una forza: per specificarla in modo esatto occorre dare di essa sia l'intensità che la direzione, lungo cui si espleta, ed il verso in cui agisce.

In meccanica per rappresentare una forza si fa uso di un vettore, cioè di un segmento preso su di una retta, disegnato come una freccia, il cui inizio è l'origine del vettore e la cui fine è determinata dalla punta della freccia. La lunghezza di questo segmento rappresenta, nella scala che si desidera, l'intensità della forza; la retta, di cui fa parte il segmento, rappresenta la direzione secondo cui si espleta la forza e la freccia, disegnata all'estremo del segmento, indica il verso in cui essa agisce.

Una forza è una grandezza vettoriale, cioè rappresentabile con un vettore in cui O è il punto in cui la forza è applicata ed OA, la lunghezza del vettore, corrisponde alla sua intensità, fig. 29.

Fig. 29.

- Una grandezza che può essere definita solo dal valore, senza necessità di indicarne la direzione, si chiama scalare.
- Se, per definire una grandezza, occorre averne il valore dell'ampiezza e la direzione la grandezza è vettoriale.
- Due vettori sono uguali quando hanno ampiezze e versi uguali e risultano paralleli fra loro.
- La componente di un vettore su di una retta orientata (come può essere l'asse delle ascisse) è la lunghezza del segmento ottenuto proiettando il vettore sulla retta, cioè abbassando dai suoi estremi due perpendicolari alla retta, fig. 30 *a*: il vettore OA ha come componente la proiezione BC.

Se il vettore OA ha l'origine sulla retta è sufficiente effettuare la proiezione dell'estremo del vettore stesso, fig. 30 *b* e *c*.

Il valore della componente è perciò dato da:

$$OC = OA \cos \alpha$$

poichè:

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OA}$$

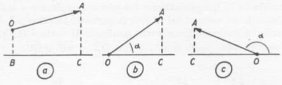


Fig. 30.

• Il vettore OA può essere indicato solo dalla lettera posta al suo estremo, scritta in grassetto, **A**, o con un tratto superiore, $\bar{A}$.

23. Composizione dei vettori.

• Si consideri un esempio meccanico: in fig. 31 *a* ai punti B e C è fissata una striscia di gomma; afferratala per il centro O, in cui è posta internamente una pietra, viene tesa in modo da farle assumere la configurazione di figura, cioè con il lato OB uguale ad OC e con l'angolo fra questi due lati di 90°. Lasciata la striscia di gomma la pietra è lanciata a distanza, perchè si trova sottoposta alle due forze combinate OB ed OC, la cui risultante è OA, ed infatti la pietra segue nella sua traiettoria la direzione di OA.

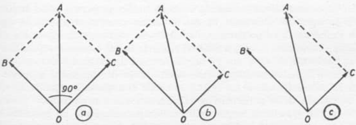


Fig. 31.

Se il punto O, in cui si prende la striscia di gomma, non è esattamente al centro, la forza risultante applicata alla pietra spingerà sempre questa in avanti, ma in direzione differente dalla precedente, fig. 31 *b*.

Dall'osservazione della direzione in cui si sposta la pietra, a seconda della posizione del punto O, si ricava la regola per ottenere la risultante di due forze e quindi di due vettori.

Per l'estremo libero di ogni vettore si tracci una parallela all'altro: queste parallele si incontrano in un punto e costituiscono, con i due vettori, un parallelogramma. Il punto di incrocio di esse è l'estremo libero del vettore risultante ch'è così determinato completamente, quanto ad ampiezza, direzione e verso.

Per semplificare la determinazione del vettore risultante è sufficiente portare per l'estremo di un vettore, ad es. OC, la parallela all'altro OB, di lunghezza uguale a questo: si ottiene ancora come risultante il vettore OA, fig. 31 *c*.

Questo vettore può essere indicato con $\overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC}$.

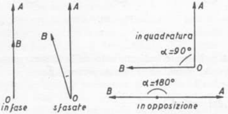


Fig. 32.

• La somma di due vettori è largamente adoperata in elettrotecnica, nei problemi relativi alle correnti alternate. In tali applicazioni essi non rappresentano due forze ma tensioni o correnti, o altre grandezze elettriche, e, per trovare la risultante di due di esse (che debbono essere dello stesso tipo, cioè o due tensioni o due correnti), si opera come già detto.

La rappresentazione vettoriale è anche molto adoperata nello studio dei circuiti in corrente alternata, in cui si hanno contemporaneamente due di queste grandezze, di tipo diverso, che agiscono contemporaneamente e di cui si debbono esaminare i comportamenti relativi. In tal caso non è possibile trovare la risultante di esse, ma gli angoli formati dai vettori che le rappresentano hanno la massima importanza nello studio dei fenomeni relativi: così fra un vettore tensione ed un vettore corrente si avrà un angolo di 90° o minore a seconda delle particolari condizioni del circuito elettrico.

• Se le due grandezze raggiungono contemporaneamente un massimo o un minimo esse sono dette in fase; se una di esse lo raggiunge prima è sfasata in anticipo rispetto all'altra, se lo raggiunge dopo è sfasata in ritardo.

Se le due grandezze sono sfasate di 180° i due vettori risultano uno sul prolungamento dell'altro, ma rivolti in senso opposto: essi risultano in opposizione.

Se lo sfasamento è di 90° i due vettori sono in quadratura.

L'angolo di sfasamento fra due grandezze elettriche è indicato normalmente con la lettera φ (fi), ma può esserlo anche con α (alfa), fig. 32.

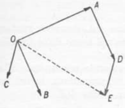


Fig. 33.

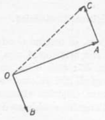


Fig. 34.

- Per effettuare la somma di più vettori, fig. 33, si traccia, per l'estremo di uno, la parallela ad uno degli altri e su di essa si prende un segmento uguale al secondo vettore; si opera allo stesso modo per il terzo vettore. Il vettore *AD* è uguale al vettore *OB* ed il vettore *DE* uguale ad *OC*: il vettore risultante è *OE*, che può essere rappresentato con: $\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

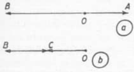


Fig. 35.

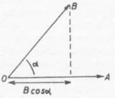


Fig. 36.

- La differenza di due vettori si effettua in modo simile alla somma, occorre però invertire, nella composizione, la direzione del vettore da sottrarre. In fig. 34 sono i due vettori *OA* ed *OB* da sottrarre: per l'estremo *A* di *OA* si traccia la parallela ad *OB* ma si individua su questa il vettore *AC*, con verso opposto ad *OB* ed uguale lunghezza: la risultante della differenza è *OC*.
- Se i due vettori da sottrarre risultano in opposizione, fig. 35 *a*, si sposta quello di minore ampiezza sull'altro, in modo che la sua origine coincida con l'estremo del più ampio: il segmento *OC* è il vettore risultante da *OB-OA*, fig. 35 *b*.

Il vettore risultante dalla differenza di due vettori può essere indicato con: $\overline{OC} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

• Il prodotto di due vettori può essere inteso solo come prodotto scalare, cioè solo come prodotto delle ampiezze dei vettori, ed esso è dato dall'ampiezza di uno di essi per la proiezione dell'altro su di esso, fig. 36.

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cos \alpha$$

24. I vettori in elettrotecnica.

• Un vettore, di origine O ed ampiezza fissa OA, descrive, ruotando intorno ad O, con il suo estremo A una circonferenza nel senso della freccia, con moto uniforme, fig. 37: esso è un vettore ruotante.

Il numero di giri ch'esso compie in un secondo corrisponde alla frequenza della grandezza elettrica alternata da esso rappresentata, la cui fase è determinata dall'angolo φ ch'esso individua con l'asse OX.

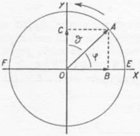


Fig. 37.

Proiettando l'estremo A del vettore sull'asse X si ottiene il vettore alternativo $\overline{OB}$, la cui lunghezza e verso sono continuamente variabili con il ruotare del vettore $\overline{OA}$.

Si può ugualmente proiettare il vettore $\overline{OA}$ sull'asse y ed ottenere il vettore alternativo $\overline{OC}$.

I due vettori $\overline{OB}$ ed $\overline{OC}$ costituiscono le due componenti rettangolari di OA e possono raggiungere un'ampiezza massima uguale ad $\overline{OA}$ ed hanno la stessa frequenza di questo vettore, ma la loro fase rispetto ad $\overline{OA}$ è continuamente variabile, pur restando costante la somma dei due angoli φ e δ (fi e delta), individuati con il vettore ruotante $\overline{OA}$.

Il vettore $\overline{OA}$ può essere espresso in termini dei suoi componenti:

$$\bar{A} = \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{B} + \bar{C}$$

• Una ruota che gira con velocità uniforme o le variazioni di una tensione alternata sono fenomeni periodici, cioè la stessa posizione di un punto sulla periferia della ruota o lo stesso valore e segno della tensione di un morsetto, di un generatore di corrente alternata, si ottengono ad intervalli di tempo uguali, chiamati periodi.

Se il punto A sulla circonferenza di fig. 37 ruota a velocità uniforme il punto B si sposta sul diametro orizzontale da E ad F con moto detto armonico.

• La velocità di A può essere espressa in vari modi, come centimetri al secondo, radianti al secondo, cioè a mezzo di lunghezze, e questa velocità è detta lineare, oppure in unità angolari (gradi, minuti, secondi), e la velocità è detta angolare e rappresentata con la lettera ω (omega minuscolo). Se l'estremo del raggio descrive tutta la circonferenza in un secondo esso avrà una velocità lineare di 2π radianti e, per convenzione, una velocità angolare ω uguale a 2π.

Se l'estremo del raggio descrive f volte in un secondo tutta la circonferenza la sua velocità angolare ω sarà uguale a $2\pi f$, chiamando con f la frequenza di queste rotazioni nell'unità di tempo.

Se le rotazioni sono 100 al secondo si ha:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 100 \text{ rad/sec} = 628 \text{ rad/sec}$$

Di un angolo misurato in radianti, come quello ora indicato, si omette normalmente la dicitura radianti, sottintendendola.

• ω è chiamata pulsazione e nelle formule adoperate in radiotecnica può essere considerata in alcuni casi come una costante, in altri come un parametro, a seconda che la frequenza abbia un valore fisso o possa assumere valori diversi.

Il diffuso uso dei radianti invece dei gradi nelle formule è dovuto all'essere il radiante un numero puro, in quanto è il rapporto fra due lunghezze (quella dell'arco di circonferenza descritta da A e quella del raggio), e, come tale, può entrare come fattore o termine in un'eguaglianza più facilmente di un determinato numero di gradi e loro frazioni, inoltre esso consente in modo semplice di esprimere la rotazione angolare in funzione del tempo.

2π è il numero di radianti percorsi dal raggio in un giro o durante un periodo della corrente alternata, $2\pi f$ è il numero dei radianti percorsi dal raggio in un secondo e $2\pi f t$ il numero dei radianti percorsi in un tempo t qualsiasi.

• Se si vuol determinare il valore dell'ordinata y, corrispondente ad un determinato numero di gradi di φ, fig. 37, si misura l'ampiezza del seno di φ:

$$y = \operatorname{sen} \varphi$$

Questa ampiezza ha un determinato valore in quanto il raggio della circonferenza con cui si è costruita la sinusoide è di lunghezza unitaria.

- Se il raggio ha una lunghezza r (cioè corrisponde ad una grandezza di valore r):

$$y = r \operatorname{sen} \varphi$$

- Si può sostituire all'angolo φ il numero di radianti percorso dal punto A sulla circonferenza fino all'istante voluto:

$$y = r \operatorname{sen} 2\pi f t = r \operatorname{sen} \omega t$$

- Le tensioni e le correnti alternate sono rappresentate da sinusoidi, come quella di fig. 25; per ottenere il valore della tensione o della corrente in un determinato istante (valore istantaneo) si fa uso della formula precedente, introducendo in questa, al posto di r, il valore massimo della tensione o della corrente:

$$v = V \operatorname{sen} \omega t$$

$$i = I \operatorname{sen} \omega t$$

In queste formule le lettere minuscole v ed i indicano i valori istantanei raggiunti da queste grandezze, quelle maiuscole indicano i valori massimi o di picco, che le grandezze raggiungono durante ogni semiperiodo.

- Nei circuiti in corrente alternata la corrente circola nelle resistenze in fase con la tensione, nelle bobine in ritardo rispetto alla tensione e nei condensatori in anticipo rispetto ad essa. Questo particolare comportamento è chiaramente illustrato a mezzo dei vettori ruotanti.

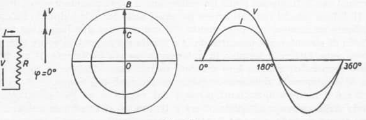


Fig. 38.

Nei tre casi disegnati nelle figg. 38, 39 e 40 la tensione ha sempre lo stesso valore V e la resistenza, l'induttanza e la capacità sono scelti di valore adatto a far circolare in ogni caso la stessa intensità massima di corrente. Se il circuito è costituito da una resistenza, fig. 38, la tensione e la corrente risultano in fase, cioè man mano che la tensione aumenta, durante un semiperiodo da zero al valore massimo, la corrente aumenta in corrispondenza: i due vettori OB ed OC risultano sovrapposti e si mantengono tali durante la loro rotazione.

Se il circuito è costituito da un'induttanza, fig. 39, la corrente risulta in ritardo rispetto alla tensione di 90°, cioè raggiunge il valore massimo quando la tensione applicata alla bobina si riduce a zero, e questo sfasamento si mantiene invariato durante la rotazione dei vettori.

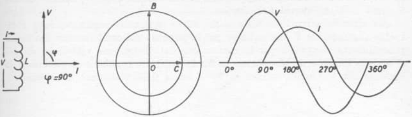


Fig. 39.

Lo stesso comportamento si verifica nel caso che il circuito sia costituito da una capacità, fig. 40, osservando però che la corrente è in anticipo sulla tensione.

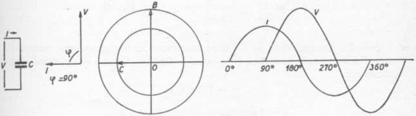


Fig. 40.

• Se il circuito è costituito da più elementi collegati in serie fra loro a seguito dell'applicazione di una tensione vi circola una corrente ed i vettori I e V hanno la stessa frequenza.

Nel circuito in serie di fig. 41 la tensione V fa scorrere una corrente, il cui valore è dato dal rapporto fra la tensione applicata e l'impedenza presentata dal circuito, $I = V/Z$: essa è rappresentata dal vettore I, che può essere tracciato in una posizione qualsiasi, ad esempio verticalmente. Poichè il valore della tensione V è quello massimo di cresta anche il valore di I risulta massimo.

Per i vettori delle tensioni e della corrente si sono adoperate scale differenti in quanto interessa considerare solo la loro relativa differenza di fase.

La caduta di tensione V_r che si verifica sulla resistenza è in fase con la corrente ed i due vettori relativi sono disegnati sovrapposti. La caduta di tensione su L avviene in anticipo di 90° sulla corrente, ed in tale relazione di fase è disegnato il vettore V_l rispetto quello della corrente.

Dalla somma vettoriale di V_r e V_l risulta V, cioè la tensione applicata al circuito: essa è in anticipo rispetto alla corrente di un angolo φ minore di 90°, a causa della resistenza nel circuito.

Nel caso del circuito in serie di fig. 42 lo sfasamento della corrente I rispetto alla tensione V è in anticipo per la presenza del condensatore. Lo stesso procedimento si applica per la costruzione del diagramma vettoriale, da cui si ottiene l'angolo di sfasamento φ fra la tensione applicata al circuito e la corrente che vi circola, minore di 90° a causa della resistenza nel circuito.

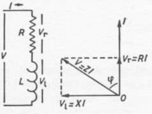


Fig. 41.

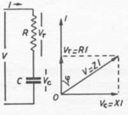


Fig. 42.

• Quando si vuole ottenere il valore istantaneo di due grandezze vettoriali, sfasate fra loro esattamente di 90°, come in fig. 39, occorre tener conto dello sfasamento:

$$v = V \operatorname{sen} \omega t$$

$$i = I \operatorname{sen} (\omega t - 90°) = I \cos \omega t$$

• In radiotecnica si considerano sovente tensioni o correnti che non variano sinusoidalmente nel tempo ma risultano dalla contemporanea applicazione al circuito di tensioni a frequenze ed ampiezze differenti. Le loro frequenze sono multiple della frequenza più bassa e sono dette armoniche della fondamentale. Una simile tensione ha valori istantanei ricavabili dalla formula:

$$v = V_1 \operatorname{sen} \omega t + V_2 \operatorname{sen} 2 \omega t + V_3 \operatorname{sen} 3 \omega t + ...$$

in cui V_1, V_2, V_3... indicano le ampiezze massime raggiunte da ognuna delle tensioni ed ωt, $2 \omega t$,, $3 \omega t$... indicano che le pulsazioni, relative ad ognuna, risultano multiple di quella fondamentale, appunto perchè le rispettive frequenze sono multiple della fondamentale.

25. Coordinate polari.

• Oltre alle coordinate cartesiane o rettangolari (con gli assi ortogonali fra loro) si fa uso anche delle coordinate polari, con le quali un punto è individuato nel piano a mezzo di un angolo φ (detto argomento) e della distanza r, fig. 43. La distanza del punto P dall'origine O è individuata da un segmento r, detto raggio vettore o modulo, ch'è considerato sempre di segno positivo. Esso si trova ad un angolo φ con l'asse di riferimento delle ascisse, a cui si fa coincidere 0°, costituendo un lato dell'angolo φ.

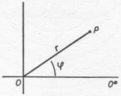


Fig. 43.

• Per poter individuare facilmente i punti nel piano per le coordinate cartesiane si fa uso di carte quadrettate, per le coordinate polari di carte del tipo

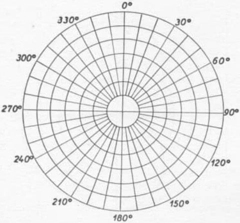


Fig. 44.

di fig. 44. Le circonferenze concentriche ed equidistanti consentono di determinare facilmente la lunghezza del raggio vettore, i vari raggi l'ampiezza dell'angolo φ.

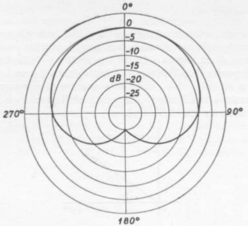


Fig. 45.

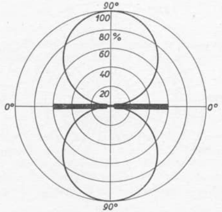


Fig. 46.

• In radiotecnica si fa uso delle coordinate polari per tracciare la caratteristica di resa dei microfoni rispetto alla direzione delle onde sonore che li in-

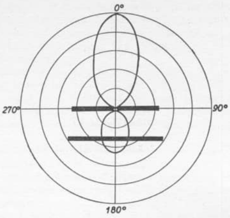


Fig. 47.

vestono, fig. 45, la caratteristica di irradiazione di antenne trasmittenti, fig. 46, e di direzionalità dei sistemi di dipoli per TV, fig. 47.

CAPITOLO VI

LOGARITMI

26. Logaritmi.

• Nel paragrafo 7, sulle Potenze, si è visto come abbreviare la scrittura e semplificare i calcoli con le potenze di 10.

Tenendo presente la tabella delle potenze del 10 è facile notare che un numero compreso fra 1 e 10 può essere rappresentato da 10 elevato ad una potenza, compresa fra 0 ed 1 ($10^0 = 1$; $10^1 = 10$): la tabella VIII dei logaritmi fornisce questi particolari valori delle potenze.

I logaritmi sono dei numeri ausiliari, che, calcolati una volta tanto e pubblicati in tabelle, permettono di semplificare notevolmente molti calcoli.

Dalle tabelle dei logaritmi si ricava che il numero 2, compreso fra 1 e 10, può essere scritto $10^{0,3010}$, cioè con un esponente compreso fra 0 ed 1; il numero 3 è rappresentato da $10^{0,4771}$.

Poichè con questo particolare sistema di notazione dei numeri si ripete sempre il 10, come base, si omette di scrivere questa, dando all'esponente il nome di logaritmo. Perciò nei due esempi dati il logaritmo di $2 = \log 2 = 0{,}3010$ ed il logaritmo di $3 = \log 3 = 0{,}4771$.

Quando il numero è compreso fra 10 e 100, cioè fra 10^1 e 10^2, l'esponente a cui va elevato 10 dev'essere compreso fra 1 e 2.

Si prenda in esame il numero 30: esso è nella stessa posizione fra 10 e 100 di 3 fra 1 e 10, quindi il suo logaritmo deve essere uguale a quello di 3, ma compreso fra 1 e 2, sarà perciò $\log 30 = 1{,}4771$.

Con lo stesso criterio sarà $\log 300 = 2{,}4771$ e $\log 3000 = 3{,}4771$.

• La parte del logaritmo a destra della virgola resta immutata, sempre che non cambino le cifre del numero, quella a sinistra aumenta o diminuisce di 1 ogni volta che il numero è moltiplicato o diviso per 10.

La parte a destra del logaritmo, data dalla tabella VIII fino alla quarta cifra decimale, è chiamata mantissa, la parte a sinistra della virgola, o parte intera, è detta caratteristica. In merito ad essa occorrono delle precisazioni circa il modo come ottenerla.

• Dato un numero, di cui si voglia determinare il logaritmo, si contino le cifre di cui è costituito, da sinistra a destra, se c'è una virgola si conti fino a questa (cioè se il numero comprende delle cifre decimali non si tien conto di queste). La caratteristica del logaritmo sarà un numero uguale al numero delle cifre della parte intera meno uno.

Così 10 è costituito da due cifre ed il suo logaritmo è $\log 10 = 1$; per 100 è $\log 100 = 2$; per 1000 è $\log 1000 = 3$, ecc.

• Se il numero ha una parte intera 0 ed una parte decimale la caratteristica risulta negativa. Cioè se il numero di cui si deve trovare il logaritmo è compreso fra 0 ed 1, escluso 1 (il cui logaritmo è 0), esso avrà una caratteristica negativa.

Il numero relativo alla caratteristica è quello del numero di zero precedenti le cifre significative: così la caratteristica di 0,0032 è -3.

• Stabilito così come si determina il valore e segno della caratteristica per un numero qualsiasi occorre esaminare l'uso della tabella dei logaritmi per determinare la mantissa.

Si voglia trovare il logaritmo di 3250: si cerchi sulla colonna N di tabella VIII il numero 32, spostatisi sulla colonna sotto il 5 si trova 5119, che va scritto in un primo momento, 5119. Si conti il numero di cifre che costituisce il numero: esse sono 4 e la caratteristica in tal caso è 3 e positiva. Si ha in definitiva $\log 3250 = 3 + 0{,}5119 = 3{,}5119$.

Si trovi il logaritmo di 0,00780. All'altezza del numero 78 si ha sulla prima colonna la mantissa 8921. Si contino i zero precedenti la prima cifra significativa: la caratteristica è 3, negativa, e si deve scrivere $\log 0{,}00780 = -3 + + 0{,}8921 = \bar{3}{,}8921$.

A questo punto occorre precisare che la mantissa è sempre positiva.

Poichè la caratteristica è negativa per i numeri inferiori ad 1, il relativo segno negativo va posto superiormente al valore della caratteristica e non anteriormente, indicando con ciò che il segno negativo non appartiene a tutto il logaritmo.

• Il numero che corrisponde ad un dato logaritmo è chiamato antilogaritmo ed il suo valore è trovato con un procedimento inverso a quello indicato per la determinazione del logaritmo, avvalendosi della tabella IX.

27. Calcoli con i logaritmi.

• Raggruppando le regole sui logaritmi prima di darne degli esempi più specifici è possibile rendersi conto dei notevoli vantaggi che essi offrono in molti calcoli matematici.

• Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori: $\log (a \cdot b) = \log a + \log b$.

• Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo ed il logaritmo del divisore: $\log a/b = \log a - \log b$.

• Il logaritmo di un numero elevato ad una potenza è uguale al prodotto dell'indice della potenza per il logaritmo del numero: $\log a^x = x \log a$.

- Il logaritmo della radice di un numero è uguale al prodotto dell'inverso dell'indice della radice per il logaritmo del numero:

$$\log \sqrt[x]{a} = \frac{1}{x} \log a = \frac{\log a}{x}$$

- Per moltiplicare per un numero intero un logaritmo si moltiplicano per esso, indipendentemente, la caratteristica e la mantissa:

$$2\,(3{,}3010) = 2\,(3 + 0{,}3010) = 6{,}6020;$$

$$4\,(1{,}4314) = 4\,(1 + 0{,}4314) = 4 + 1{,}7256 = 5{,}7256$$

- Per moltiplicare per un numero intero un logaritmo, con caratteristica negativa, si moltiplicano indipendentemente la caratteristica e la mantissa per il numero e si effettua quindi la somma algebrica della nuova caratteristica e del riporto intero della mantissa:

$$\bar{2}{,}740 \cdot 4 = (\bar{2} + 0{,}740)\,4 = \bar{8} + 2{,}960 = \bar{6}{,}960;$$

$$10 \log 0{,}3 = 10 \cdot \bar{1}{,}477 = \overline{10} + 4{,}77 = \bar{6}{,}77$$

- Per dividere per un numero intero un logaritmo con caratteristica negativa si effettuano, separatamente, le divisioni delle due parti del logaritmo, che si scrivono poi di seguito:

$$\bar{8}{,}844 : 4 = \bar{2}{,}211$$

- Se la caratteristica non è divisibile per il numero si aggiungeranno, sia ad essa che alla mantissa, tante unità da ottenere la divisibilità voluta:

$$\bar{1}{,}397 : 2 = (\bar{1} + 0{,}397) : 2 = (\bar{2} + 1{,}397) : 2 = \bar{1}{,}698;$$

$$\bar{1}{,}397 : 3 = (\bar{1} + 0{,}397) : 3 = (\bar{3} + 2{,}397) : 3 = \bar{1} + 0{,}799 = \bar{1}{,}799$$

- Seguono ora delle applicazioni che sono realizzate a mezzo delle tabelle VIII e IX.

Come già detto per le potenze del 10, il prodotto di due potenze della stessa base si ottiene sommando i relativi esponenti; così il prodotto di due numeri qualsiasi può essere ottenuto sommando i rispettivi logaritmi e trovando l'antilogaritmo della somma.

Trovare il prodotto di 536 per 83.

La caratteristica di 536 è 2. Sulla tabella VIII si cercano le prime due cifre, 53, sulla colonna N, e sotto alla colonna del 6 corrisponde la mantissa 7292; essa è realmente 0,7292, non essendo segnato lo zero sulla tabella.

Tabella VIII.

Logaritmi.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	3	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	6	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

(segue)

segue Tabella VIII

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7642	7679	7686	7694	7701	1	2	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
											1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

TABELLA IX.

Antilogaritmi.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1075	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

(segue)

segue Tabella IX

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	5667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

La caratteristica di 83 è 1 e la mantissa, ottenuta con lo stesso procedimento su descritto, è 0,9191:

$$\begin{array}{rl} \log 536 = 2{,}7292 & \\ \log\ \ 83 = \underline{1{,}9191} & \\ 4{,}6483 & \text{logaritmo del prodotto} \end{array}$$

Poichè la caratteristica di questo logaritmo è 4 il prodotto è costituito da un numero di 5 cifre. Nella tabella IX degli antilogaritmi si cercano nella colonna N le prime due cifre e la terza fra quelle segnate in alto: si ottiene in corrispondenza a 648 l'antilogaritmo 4446. Ma il logaritmo trovato ha una quarta cifra, 3; nell'ultima serie di colonne a destra si trova sotto quella del 3 ancora 3, da sommare al valore precedente, quindi l'antilogaritmo di 0,6483 è:

$$4446 + 3 = 4449$$

Ma la caratteristica del logaritmo indica che il risultato deve essere di 5 cifre, quindi si aggiunge uno zero al risultato predetto, pertanto:

$$536 \cdot 83 = 44\,490$$

Effettuando la moltiplicazione, direttamente fra 536 ed 83, si ottiene 44 488.

• La divisione di due numeri si effettua eseguendo la differenza fra i logaritmi del dividendo e del divisore e trovando l'antilogaritmo del risultato.

Effettuare 402 : 810:

$$\begin{array}{rl} \log 402 = 2{,}6042 & \\ \log 810 = \underline{2{,}9085} & \\ \bar{1}{,}6957 & \text{logaritmo del quoziente} \end{array}$$

la differenza fra i due logaritmi risulta negativa quindi l'antilogaritmo è minore di zero ed è:

$$0{,}4955 + 8 = 0{,}4963 \text{ quoziente}$$

Effettuando la divisione, direttamente fra 402 ed 810, si ottiene 0,49629.

• Per ottenere la potenza di un numero si moltiplica il logaritmo del numero per l'indice della potenza richiesta, si trova quindi l'antilogaritmo del prodotto.

Elevare 18^5:

$$\begin{array}{r} \log 18 = 1{,}2553 \\ \underline{5} \\ 6{,}2765 \end{array}$$

antilog 2765 = 1888 + 2 = 1890.

Poichè il numero deve risultare di sette cifre la potenza è $18^5 = 1\,890\,000$.

Da questo esempio risulta che i logaritmi possono costituire una notevole semplificazione nei calcoli, mentre dai due esempi precedenti il loro impiego può apparire come una inutile complicazione.

• Il logaritmo del numero, di cui si vuol ottenere la radice, va diviso per l'indice della radice; si trova poi l'antilogaritmo del quoziente. L'uso dei logaritmi è l'unico mezzo che si offre al lettore per estrarre radici con esponente più elevato di 2.

Estrarre: $\sqrt[3]{12}$ $\frac{1}{3}\log 12 = \frac{1}{3}\,1{,}0792 = 0{,}3597$ antilog $0{,}3597 = 2{,}29$

$\sqrt[4]{12}$ $\frac{1}{4}\log 12 = \frac{1}{4}\,1{,}0792 = 0{,}2698$ antilog $0{,}2698 = 1{,}86$

$\sqrt[3]{0{,}093}$ $\frac{1}{3}\log 0{,}093 = \frac{1}{3}\,\bar{2}{,}9685$

La caratteristica può essere negativa ma la mantissa è sempre positiva.

Se la caratteristica non è divisibile per il numero intero voluto si altera il logaritmo togliendo o aggiungendo un numero qualsiasi alla caratteristica ed alla mantissa, per renderla divisibile. Nell'esempio in esame si aggiunge 1 alla caratteristica ed alla mantissa:

$$\frac{1}{3}\,\bar{2}{,}9685 = \frac{1}{3}\left(\bar{3} + 1{,}9685\right)$$

ed effettuando le divisioni:

$$\bar{1} + 0{,}6561 = \bar{1}{,}6561$$

il cui antilogaritmo è:

$$0{,}4529 + 1 = 0{,}4530$$

28. Il decibel.

• Alcuni fenomeni naturali, come la sensazione uditiva, non seguono una legge di variazione lineare. La variazione nello stimolo, uditivo, necessaria per produrre una variazione percettibile nell'intensità di un suono, è proporzionale allo stimolo già esistente. L'energia richiesta per parlare in un ambiente silenzioso è minima, quella richiesta per farsi intendere fra il vociare di molte persone è notevolmente maggiore.

Si è perciò dimostrato necessario un sistema di misura delle intensità sonore basato su rapporti logaritmici, in modo che differenti livelli sonori possano essere paragonati, a seconda dello stimolo uditivo che producono.

• Una linea di trasmissione può essere considerata come costituita di varie sezioni successive, fig. 48; ognuna, costituita da uguali valori di induttanza, resistenza, capacità e conduttanza, produce un'uguale riduzione di un segnale applicato ai morsetti di entrata: all'uscita della linea si ha un'attenuazione del segnale di valore uguale al prodotto delle attenuazioni successive, prodotte da tutte le sezioni da cui la si ritenga costituita.

L'attenuazione è il rapporto fra due potenze, quella applicata all'ingresso e quella ottenuta all'uscita: invece di effettuare il prodotto delle attenuazioni, fornite da un certo numero di sezioni della linea, si effettua la somma dei logaritmi delle attenuazioni e, poichè queste sono uguali per ogni sezione della linea, è sufficiente moltiplicare per il numero delle sezioni della linea il logaritmo dell'attenuazione prodotta da una sola di esse.

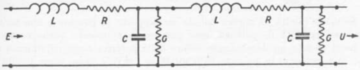


Fig. 48.

- Ogni stadio di un amplificatore fornisce una determinata amplificazione: se più stadi hanno uguali caratteristiche il valore dell'amplificazione totale è dato dal prodotto delle singole amplificazioni o dal prodotto del numero di stadi per il logaritmo dell'amplificazione fornita da uno solo, uguale al logaritmo del rapporto fra la potenza di uscita e quella all'entrata.
- Quando il rapporto fra due potenze elettriche o acustiche è uguale a 10 il logaritmo di questo rapporto ha il valore di 1. A questa unità è stato dato il nome di *bel* (simbolo B).

$$\log_{10} \frac{P_2}{P_1} = \log_{10} 10 = 1 \text{ bel} = 1 \text{ B}$$

Più comunemente si fa uso del decibel, cioè della decima parte del bel, per cui il logaritmo suddetto va moltiplicato per 10 per ottenere il numero dei decibel corrispondenti al rapporto fra le potenze:

$$10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \text{ decibel} = 10 \text{ dB}$$

Ad un decibel corrisponde una variazione appena percettibile dell'intensità di un suono, prodotto da un altoparlante collegato all'uscita di un amplificatore.

- Se si fa variare l'uscita di un amplificatore in modo che la potenza erogata sul carico vari da 4 a 2 watt, si ottiene una variazione di:

$$10 \log \frac{4}{2} = 10 \log 2 = 3{,}01 \text{ dB}$$

si ottiene cioè una variazione dell'intensità sonora solo di 3 volte maggiore della minima variazione percettibile con l'orecchio.

L'uscita di un microfono è di 0,003 W: facendo uso di un cavo di una certa lunghezza si ottiene all'estremo di questo una potenza di 0,0007 W, per le perdite insite nel cavo. Questo introduce quindi un'attenuazione ch'è indicata dal segno negativo del logaritmo perchè relativo ad un valore del rapporto fra le potenze inferiore all'unità:

$$10 \log \frac{0{,}0007}{0{,}003} = 10 \log 0{,}23 = 10 \cdot \bar{1}{,}36 = -10 + 3{,}6 = -7{,}6 \text{ dB}$$

• Sebbene l'unità di misura bel sia un rapporto di potenze e non un'unità di misura assoluta di potenza, essa può essere adoperata anche come tale, purchè si prenda un determinato valore della potenza come riferimento dello zero: comunemente la potenza di 0,001 W = 1 mW è presa come livello zero (sovente si fa uso, per gli amplificatori, di un livello zero di 0,006 W = 6 mW).

Con dBm si indica una potenza espressa in decibel ritenendo 0 dB = 1 mW.

Se un amplificatore fornisce una potenza di 4 W al carico la sua resa è di:

$$10 \log \frac{4}{0{,}001} = 10 \log 4000 = 10 \cdot 3{,}6 = 10 \cdot 3 + 10 \cdot 0{,}6 \text{ dB} = 36 \text{ dB}$$

al disopra del livello dello zero (0,001 W).

Un microfono che ha una potenza di uscita di 0,003 W avrà:

$$10 \log \frac{0{,}003}{0{,}001} = 10 \log 3 = 4{,}7 \text{ dB}$$

al disopra del livello dello zero.

• Le misure di potenza fra i morsetti di ogni sezione successiva della linea di trasmissione di fig. 48 sono difficoltose da eseguire; è molto più facile eseguire misure di tensione o di corrente nei punti suddetti. Nella formula relativa ai decibel si possono sostituire valori di tensioni o di correnti a quelli delle potenze tenendo presente che:

$$P = R\, I^2 = V^2/R$$

per cui si può mettere:

$$P_1 = R\, I_1^2 \qquad P_0 = R\, I_0^2$$

dopo aver misurato le correnti circolanti in una resistenza R, dello stesso valore dell'impedenza caratteristica della linea, inserita fra le due prime coppie di morsetti:

$$10 \log \frac{P_1}{P_0} = 10 \log \frac{R\, I_1^2}{R\, I_0^2} = 10 \log \frac{I_1^2}{I_0^2} = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2 = 20 \log \frac{I_1}{I_0}$$

Operando allo stesso modo con le tensioni presenti fra le suddette coppie di morsetti si ha:

$$20 \log \frac{V_1}{V_0}$$

Con dBv si indica una tensione espressa in decibel ritenendo 0 dB = 1 V.

• Il neper è il logaritmo del rapporto fra due potenze, il cui valore è determinato facendo uso dei logaritmi neperiani o con base $\varepsilon = 2{,}718$, per cui: 1 neper = 8,68 dB ed 1 dB = 0,115 neper.

Tabella X.

Conversione in decibel di rapporti fra potenze o tensioni.

Rapporto di tensioni	Rapporto di potenze	− → dB ← +	Rapporto di potenze	Rapporto di tensioni
1	1	0	1	1
0,988	0,977	0,1	1,023	1,012
0,977	0,955	0,2	1,047	1,023
0,966	0,933	0,3	1,072	1,035
0,955	0,912	0,4	1,096	1,047
0,944	0,891	0,5	1,122	1,059
0,933	0,871	0,6	1,148	1,072
0,923	0,851	0,7	1,175	1,084
0,912	0,832	0,8	1,202	1,096
0,902	0,813	0,9	1,230	1,109
0,891	0,794	1	1,259	1,122
0,794	0,631	2	1,585	1,259
0,708	0,501	3	1,995	1,413
0,631	0,398	4	2,512	1,585
0,562	0,316	5	3,162	1,778
0,501	0,251	6	3,981	1,995
0,447	0,199	7	5,012	2,239
0,398	0,158	8	6,310	2,512
0,355	0,126	9	7,943	2,818
0,316	0,1	10	10	3,162
0,282	0,079	11	12,59	3,548
0,251	0,063	12	15,85	3,981
0,224	0,050	13	19,95	4,467
0,199	0,040	14	25,12	5,012
0,178	0,032	15	31,62	5,623
0,158	0,025	16	39,81	6,310
0,141	0,020	17	50,12	7,079
0,126	0,016	18	63,10	7,943
0,112	0,012	19	79,43	8,913
0,1	0,01	20	10^2	10
10^{-2}	10^{-4}	40	10^4	10^2
10^{-3}	10^{-6}	60	10^6	10^3
10^{-4}	10^{-8}	80	10^8	10^4
10^{-5}	10^{-10}	100	10^{10}	10^5

29. Diagrammi logaritmici.

• In fig. 49 è un grafico che consente la rapida trasformazione di rapporti di potenza (o di tensioni o di correnti) in decibel. Esso ha l'asse delle ascisse suddiviso in parti uguali, a cui corrispondono i valori in dB, e quello delle ordinate in modo logaritmico cioè con lunghezze decrescenti con l'aumentare dei valori segnati.

Al valore 100 corrisponde una lunghezza doppia di quella assegnata al valore 10, poichè log 100 = 2 e log 10 = 1.

Il diagramma, essendo logaritmico solo per l'asse delle ordinate, è semilogaritmico.

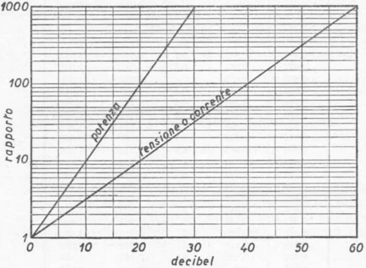


Fig. 49.

• In fig. 50 è un diagramma logaritmico: sull'asse delle ascisse sono indicate le frequenze appartenenti alla gamma di quelle acustiche, sull'asse delle ordinate sono indicate le tensioni di uscita, fornite da un amplificatore di cui si è rilevata la caratteristica di resa alle varie frequenze.

Facendo uso di una suddivisione logaritmica dell'asse delle ascisse si ha la possibilità di poter comprendere, in uno spazio limitato, tutte le frequenze interessanti la riproduzione acustica.

L'uso di una suddivisione logaritmica dell'asse delle ordinate consente di effettuare più comodamente il paragone fra le caratteristiche di resa di vari amplificatori o relative a modifiche introdotte in un determinato amplificatore (ad esempio a mezzo dei controlli di tono previsti).

Non disponendo di carte logaritmiche stampate, o doppio logaritmiche

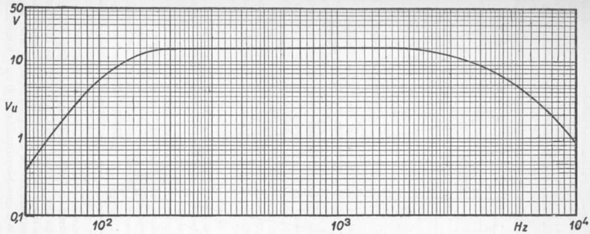


Fig. 50.

Fig. 51.

si possono tracciare sul bordo di un foglio di carta le divisioni che si desiderano della scala di fig. 51, quindi si traccia una linea ortogonale al centro della parte del bordo così suddiviso, fig. 52: si segna un punto A su questa linea alla distanza di circa 20 cm dal bordo. Si uniscono tutte le divisioni tracciate con il punto A.

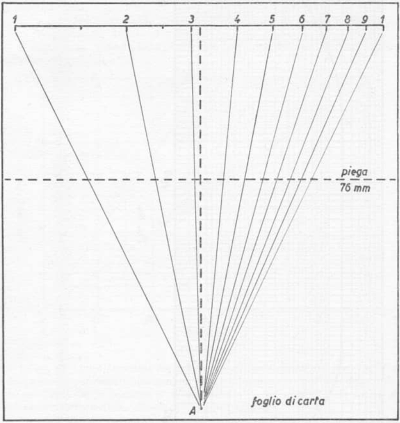


Fig. 52.

Dovendo dividere una determinata lunghezza di un asse, ad es. i 76 mm dell'asse orizzontale di fig. 50 fra due potenze di 10, si determina con buona precisione la parallela al bordo tracciato del foglio, che risulti lunga 76 mm fra le due linee estreme, si traccia una linea e si piega il foglio di carta lungo questa: è facile ora trasportare le divisioni logaritmiche su di un asse disegnato.

Occorrendo un certo numero di suddivisioni per più potenze di 10 si sposta la carta ripiegata lungo l'asse e si ripetono le serie di divisioni quante volte si vogliono.

Una suddivisione sufficientemente precisa ma che consente di tracciare solo cinque punti di una scala logaritmica può essere effettuata secondo la fig. 53, di cui è facile ricordare i valori indicati.

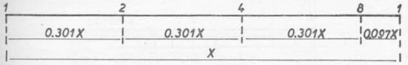


Fig. 53.

30. Il regolo calcolatore.

- Se si limita l'uso del regolo calcolatore alle operazioni di moltiplicazione, divisione, elevazione a quadrato ed estrazione della radice quadrata, occorre un tempo minimo per impararne l'uso. Si ha in tal modo a disposizione uno strumento che, pur non offrendo un'elevata precisione nei risultati, permette la rapida risoluzione di molti computi che interessano con un'approssimazione simile a quella richiesta nei calcoli radiotecnici.
- In fig. 51 sono disegnate due scale di un regolo: ognuna è fissata ad una striscia di legno che può scorrere affacciata all'altra. Le due scale sono suddivise in lunghezze proporzionali ai logaritmi dei numeri incisi vicino alle divisioni.

Su di un regolo con suddivisioni lunghe 10 cm la lunghezza della scala da 1 a 10 corrisponde al log 10 e la lunghezza in centimetri, corrispondente ad un qualsiasi numero compreso fra 1 e 10, è uguale al logaritmo di quel numero moltiplicato per 10. Così il numero 2, il cui logaritmo è 0,301, è inciso sulla scala a 3,01 cm a partire da sinistra; il numero 4, il cui logaritmo è 0,602, è inciso a 6,02 cm dallo stesso inizio della scala.

Vi sono delle divisioni intermedie che permettono di individuare un numero con tre cifre significative, così se il primo numero a sinistra, detto indice, è 1 si può facilmente individuare 1,25 oppure 2,56, ecc. Se il primo numero è 1000 gli stessi punti corrispondono a 1250 e 2560. L'indice di ogni scala può cioè essere moltiplicato o diviso per qualsiasi potenza del 10.

Le due scale AB possono essere fatte coincidere, come disegnato in fig. 51, o venire spostate l'una rispetto all'altra, per effettuare moltiplicazioni o divisioni.

- Se si sposta la scala B in modo che il suo indice corrisponda con il 2 della A, fig. 54 *a*, si ha anche che 1,5 di B corrisponde col 3 di A, il 2 col 4, il 3 col 6 e così via.

Ma $2 \cdot 2 = \log 2 + \log 2$, infatti spostando una scala in modo che la lunghezza 2 di *B* si sommi a quella 2 di *A*: si ottiene 4 su *A*, come risultato, cioè come prodotto.

• Per dividere due numeri si effettua la sottrazione dei loro logaritmi. Dovendo dividere 9 per 3 si fa coincidere il 9 di *A* con il 3 di *B* e si legge il valore che l'indice di quest'ultima scala indica su *A*, cioè 3, fig. 54 *b*. Questo stesso risultato si ottiene per 6 : 2; 7,5/2,5; 60/20; 7500/2500, ecc.

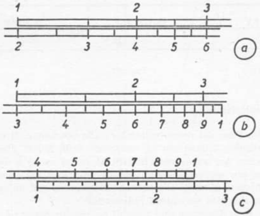


Fig. 54.

• Per facilitare la lettura dei valori incisi sulle scale si fa uso di un cursore, cioè di un vetrino che porta inciso verticalmente una linea nera, molto sottile, che sarà fatta coincidere con un estremo della scala *B*, o con il numero che interessa su questa, per poter agevolmente determinare il corrispondente valore sulla *A*.

• Quando si effettua un'operazione con il regolo occorre stabilire il posto della virgola sul risultato indicato dal cursore o i zero da aggiungere ad esso: ciò si ottiene con regole simili a quelle date per i logaritmi, più semplicemente si effettui mentalmente la stessa operazione fra numeri più semplici di quelli dati, ma aventi lo stesso numero di cifre.

Si debba moltiplicare 287 per 31: eseguita l'operazione sul regolo si è ottenuto come risultato 8,9. Per stabilire quanti zero occorre aggiungere si effettui mentalmente l'operazione $300 \cdot 30 = 9000$; si può in tal modo leggere direttamente il prodotto suddetto 8900.

• Anche i più semplici regoli calcolatori si prestano ad effettuare i quadrati dei numeri o l'estrazione della loro radice quadrata, perciò recano superiormente alle scale *A* e *B* altre due scale *C* e *D*, fig. 55, identiche fra loro, una sulla parte fissa e l'altra sullo scorrevole del regolo. Esse hanno esattamente la stessa lunghezza delle precedenti ma un numero di divisioni doppie, cioè se in A e B le divisioni vanno da 1 a 10, in C e D vanno da 1 a 100. È sufficiente perciò spostare il cursore mobile su un numero della scala A per ottenere sulla scala D il quadrato di esso, perchè su questa scala si trova in sua corrispondenza un numero relativo ad un intervallo doppio: infatti, se la scala A è considerata per l'intervallo fra i numeri da 1 a 10, a 10 corrisponde 100 sulla scala D.

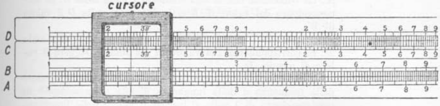


Fig. 55.

Allo stesso modo se alla scala superiore si fa corrispondere l'intervallo da 1 a 100, trovato il corrispondente sulla scala inferiore, questo ne è la radice quadrata.

- Per ottenere la radice di numeri da 100 a 10 000 si deve dare il valore 100 all'indice a sinistra sulla scala D e pertanto quello centrale a detta scala assumerà il valore di 1000 e quello a destra di 10 000. Corrispondentemente l'indice a sinistra di A assumerà il valore di 10 e quello a destra di 100.
- Per ottenere la radice quadrata di numeri inferiori ad 1, l'indice a sinistra di D assume il valore di 0,01 e quello centrale di 0,1. Corrispondentemente l'indice a sinistra di A assume il valore di 0,1 e quello a destra di 1.
- Si può adoperare il regolo per risolvere una proporzione:

per

$$2 : 8 = X : 42$$

si pone il 2 di A a coincidere con l'8 di B e sotto 42 di questa scala si legge 10,5 su A, fig. 54 c, quindi $X = 10,5$.

- Risoluzione pratica di formule con il regolo.

$V = RI$. Far coincidere I della scala C con il valore di R sulla scala D: in corrispondenza del valore di I sulla C leggere il valore di V sulla D.

$I = V/R$. Far coincidere il valore di V sulla scala D con quello di R sulla scala C: in corrispondenza di 1 sulla scala C leggere sulla D il valore di I.

$R = V/I$. Far coincidere il valore di V sulla scala D con quello di I sulla scala C: in corrispondenza di 1 sulla scala C leggere sulla D il valore di R.

CAPITOLO VII

NUMERI COMPLESSI

31. L'operatore j.

• Nella soluzione di semplici problemi con grandezze vettoriali si ricorre ai metodi trigonometrici.

In molti problemi, in cui risultino notevoli differenze nei valori delle grandezze in giuoco, si fa uso dei numeri complessi, metodo che accoppia l'esattezza del calcolo con la semplicità delle rappresentazioni grafiche: malgrado il nome questo metodo di calcolo non risulta complicato, facendo uso solo di regole dell'algebra elementare.

• Si riprenda in esame, come per i numeri relativi, una retta, fig. 56, su cui, segnato il punto O, a partire da esso sono tracciati tanti punti equidistanti, verso destra e verso sinistra, corrispondenti ai numeri relativi positivi e negativi.

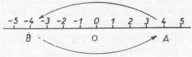


Fig. 56.

Al segmento o vettore $\overline{OA}$, preso sulla retta, corrisponde il valore 4. Se questo valore viene moltiplicato per -1 diverrà -4, a cui corrisponde il vettore $\overline{OB}$. Se si moltiplica ancora -4 per -1 si ottiene nuovamente il valore 4, cioè il vettore $\overline{OA}$.

Il numero -1 può quindi essere considerato come un operatore matematico, che fa ruotare di 180° il vettore $\overline{OA}$ cambiandone il verso, senza alterarne l'ampiezza. Questo operatore fa cioè cambiare il segno del vettore senza alterarne il valore assoluto.

Se invece di una retta si prendono in esame due rette, costituenti gli assi cartesiani di un piano, fig. 57, si può anche per esse considerare un particolare operatore matematico che faccia ruotare di 90° un vettore qualsiasi, scelto sull'asse delle ascisse, senza farne variare l'ampiezza.

A questo operatore si dà come simbolo la lettera j; per esso va moltiplicato, di volta in volta, il valore algebrico del vettore per ottenerne la rotazione di 90° in 90°.

Si consideri il vettore X, OA di fig. 55, e lo si ruoti di 90°, esso assumendo la nuova posizione OB diverrà il vettore jX.

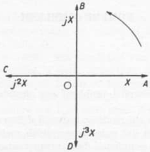


Fig. 57.

Se questo vettore è ruotato di altri 90° esso si porterà nella posizione OC divenendo il vettore j^2X, pertanto j^2 indica che il vettore è stato ruotato di $2 \cdot 90° = 180°$ dalla sua posizione originale OA. Facendo intervenire una terza volta l'operatore j il vettore assume la nuova posizione OD ed il vettore è contraddistinto da j^3X, ed j^3 indica una rotazione di $3 \cdot 90° = 270°$. Intervenendo ancora una volta l'operatore si ha il ritorno del vettore alla sua posizione iniziale OA, ma esso va contraddistinto da j^4X per l'avvenuta rotazione di 360°.

L'operatore j^2 ha fatto avvenire l'inversione del vettore e ciò equivale ad aver moltiplicato per -1 il valore del vettore, cioè ad averne cambiato il segno.

Applicando due volte di seguito l'operatore j^2 si ottiene lo stesso risultato che moltiplicare due volte di seguito per -1 il valore del vettore, infatti con l'operatore j^4 si è ritornati allo stesso verso originale, in quanto $(-1)(-1) = 1$ e non si ha cambiamento di segno.

Poichè l'operatore j^2 equivale alla moltiplicazione per -1, se ne deduce che l'operatore j equivale alla moltiplicazione per $\sqrt{-1}$:

$$j^2 = -1$$

$$\sqrt{j^2} = \sqrt{-1} = j$$

Il numero $\sqrt{-1}$ è una espressione matematica, che può avere oppur no una interpretazione fisica.

Esso è derivato dalla considerazione che in algebra non esistono radici quadrate di numeri negativi, cioè non esiste alcun numero, sia positivo che negativo, che elevato a quadrato dia come risultato un numero negativo.

Ma si può scrivere:

$$\sqrt{-X} = \sqrt{(-1)\cdot X} = \sqrt{-1}\,\sqrt{X} = j\,\sqrt{X}$$

cioè volendo ottenere la radice quadrata di qualsiasi numero negativo è sufficiente trovare la radice del numero stesso, considerandolo positivo, e farla precedere dal simbolo j.

Poichè il valore di j non può essere calcolato esso è chiamato un numero immaginario; in realtà non risulta nè meno reale nè meno immaginario del suo quadrato, -1. Anche i numeri negativi costituiscono una concezione matematica che indica un'inversione del senso. Essi infatti hanno un significato fisico sempre che si tratti di grandezze che, a partire da un punto stabilito su di un asse, possano essere misurate nei due versi, come le temperature, il tempo.

L'operatore $j = \sqrt{-1}$ fornisce numeri misurabili in quadratura rispetto a quelli sull'asse delle ascisse. Questi numeri in quadratura possono essere reali come quelli negativi, ma a differenza di questi ultimi hanno un significato solo quando esistono quattro versi o due direzioni, in cui considerare la misura di una grandezza. Essi non hanno alcun significato se i versi sono solo due (riferirsi alla fig. 56).

32. Numeri complessi con coordinate rettangolari.

• Un numero complesso è un'espressione che comprende grandezze misurate in due direzioni: esso è costituito da una parte, detta reale, ed una detta immaginaria. Con i numeri complessi un vettore è espresso in termini di altri due vettori, componenti rettangolari, giacenti su gli assi X ed Y. Il vettore componente in quadratura, giacente cioè sull'asse delle ordinate, è indicato facendolo precedere dall'operatore matematico j.

Così il vettore V in fig. 58 risulta scomposto nei suoi componenti rettangolari A ed jB ed è perfettamente definito dall'espressione:

$$\bar{V} = A + jB$$

Il numero complesso $A + jB$ può rappresentare sia il punto V nel piano che il vettore $\overline{OV}$; come il numero reale A può rappresentare sia il punto A che il valore del segmento OA sull'asse delle ascisse; come il numero immaginario jB può rappresentare sia il punto B che il valore del segmento OB, sull'asse delle ordinate.

Nell'espressione $\bar{V} = A + jB$ la lettera V, indicante il valore del vettore, va indicata con un trattino orizzontale sovrapposto alla lettera stessa, o va stampata in grassetto, per indicare una grandezza complessa.

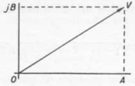


Fig. 58.

• Nella fig. 59 i quattro vettori V_1, V_2, V_3, V_4, sono definiti dai seguenti numeri complessi:

$$\bar{V}_1 = 2 + j\,3$$
$$\bar{V}_2 = -\,4 + j\,1$$
$$\bar{V}_3 = -\,3 - j\,3$$
$$\bar{V}_4 = 3 - j\,4$$

• È importante notare che in un numero complesso $\bar{V} = A + jB$ può risultare di valore nullo la parte reale o la parte immaginaria o entrambe. Se risulta di valore nullo la parte reale A il numero $O + jB$ risulta immaginario, cioè costituito dalla sola parte jB.

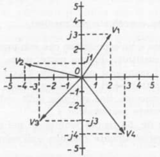


Fig. 59.

Se risulta nulla la parte immaginaria jB, cioè $A + jO$, poichè è di valore nullo il coefficiente B, il numero risulta reale.

Se entrambe le parti risultano nulle, cioè $\bar{V} = O + jO$ il numero complesso è nullo. Ad un simile numero complesso corrisponde l'origine degli assi cartesiani di fig. 59.

33. Operazioni sui numeri complessi.

• I numeri complessi della forma $a + jb$ sono soggetti alle regole algebriche dell'addizione, sottrazione e moltiplicazione tenendo presenti due fatti:

che $j^2 = -1$ e che ogniqualvolta risulti j^2 nei calcoli può essere sostituito da -1;

che i termini reali possono essere sommati solo a quelli reali ed i termini immaginari a quelli immaginari.

• Le varie potenze di j sono raggruppate nel seguente specchietto, che consente delle semplificazioni:

$$j^1 = +j = \sqrt{-1} \qquad j^5 = j^4 \cdot j = +j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = -1 \qquad j^6 = j^4 \cdot j^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \cdot j = -j = -\sqrt{-1} \qquad j^7 = j^4 \cdot j^3 = -j = -\sqrt{-1}$$

$$j^4 = j^2 \cdot j^2 = +1 \qquad j^8 = j^4 \cdot j^4 = +1$$

$$-j = -\sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{j} = -\sqrt{-1} = -j$$

$$\frac{1}{-j} = -\frac{1}{j} = \sqrt{-1}$$

• Negli esempi che saranno acclusi alle regole sulle operazioni sui numeri complessi si farà uso di valori tali da mantenere i vettori sempre nel primo quadrante, per semplificare le figure, ma nei casi pratici essi possono essere compresi in un quadrante qualsiasi.

Addizione.

• La somma di due numeri complessi è un numero complesso la cui parte reale è data dalla somma delle parti reali e quella immaginaria dalla somma delle parti immaginarie dei numeri dati:

$$(a + jb) + (c + jd) = a + jb + c + jd = (a + c) + j\,(b + d) = A + jB$$

• Esempio: sommare i due vettori $\bar{P}$ e $\bar{Q}$ e determinare il valore scalare del vettore risultante e la sua fase.

$$\bar{P} = 2 + j\,3 \qquad \bar{Q} = 4 + j\,1$$

Il vettore somma è:

$$\bar{V} = (2 + 4) + j\,(3 + 1) = 6 + j\,4$$

il valore scalare del vettore somma è:

$$|V| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7{,}21$$

e l'angolo esistente fra il vettore e l'asse delle ascisse è:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A} = \operatorname{arctg} \frac{4}{6} = \operatorname{arctg} 0{,}66 = 33^\circ\,25' \sim$$

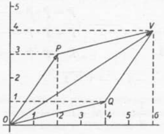


Fig. 60.

• Dalla fig. 60 si rileva che la somma dei numeri complessi corrisponde alla somma dei vettori con il metodo del parallelogramma.
• La somma di tre o più numeri complessi è ottenuta effettuando la somma di due di essi e sommandone il risultato al terzo e così via.

Sottrazione.

• La differenza fra due numeri complessi è un numero complesso, la cui parte reale è data dalla differenza fra le parti reali e quella immaginaria dalla differenza fra le parti immaginarie dei numeri dati:

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j\,(b - d) = A + jB$$

• Esempio: sottrarre dal vettore $\bar{P}$ il vettore $\bar{Q}$ e determinare il valore scalare del vettore risultante ed il suo angolo di fase, fig. 61.

$$\bar{P} = 7 + j\,5 \qquad \bar{Q} = 6 + j\,2{,}8$$

$$\bar{V} = (7 - 6) + j\,(5 - 2{,}8) = 1 + j\,2{,}2$$

il valore scalare di $\bar{V}$ è:

$$|V| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}2^2} = \sqrt{5{,}84} = 2{,}41$$

ed il suo sfasamento:

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{B}{A} = \text{arctg}\ 2{,}2 = 65^\circ\,30' \sim$$

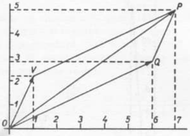


Fig. 61.

• La sottrazione di due numeri complessi rappresenta la risoluzione geometrica di un vettore nei suoi componenti: è questa risoluzione e combinazione di vettori con semplici operazioni algebriche che costituisce il principale vantaggio dell'uso dei numeri complessi nei problemi radiotecnici.

Moltiplicazione.

• Il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso ottenuto moltiplicando la parte reale del primo per la reale del secondo, la reale del primo per l'immaginaria del secondo, l'immaginaria del primo per la reale del secondo, l'immaginaria del primo per l'immaginaria del secondo:

$$(a + jb)\,(c + jd) = ac + jda + jbc + j^2bd = (ac - bd) + j\,(bc + da) =$$
$$= A + jB$$

• Esempio: moltiplicare i due vettori $\bar{P}$ e $\bar{Q}$, fig. 62.

$$\bar{P} = 2 + j\,2{,}5 \qquad \bar{Q} = 3 + j\,2$$
$$\bar{V} = \bar{P}\cdot\bar{Q} = 6 + j\,4 + j\,7{,}5 + j^2\,5 = 1 + j\,11{,}5$$

Il valore scalare di $\bar{V}$ è:

$$|V| = \sqrt{1^2 + 11{,}5^2} = 11{,}5$$

l'angolo di sfasamento:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A} = \operatorname{arctg} \frac{11{,}5}{1} = 85^\circ\, 2' \sim$$

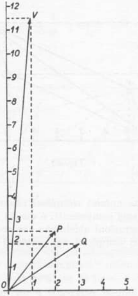


Fig. 62.

- Il prodotto di due numeri complessi pur essendo effettuato matematicamente può non avere un significato fisico: in elettrotecnica il prodotto di un numero complesso rappresentante una corrente per un numero complesso rappresentante l'impedenza del circuito attraverso cui essa circola è un altro numero complesso, rappresentante la caduta di tensione che si verifica sul circuito in esame, quindi con significato ben definito.

Il prodotto di due numeri complessi relativi a due impedenze non ha invece un significato fisico.

- L'angolo di fase del prodotto di due numeri complessi corrisponde alla somma dei loro angoli di fase.

• Il prodotto di tre o più numeri complessi è ottenuto per moltiplicazioni successive, cioè dei due primi numeri fra loro, del prodotto ottenuto per il terzo e così via.

Divisione.

• La divisione fra due numeri complessi non è effettuabile e l'espressione:

$$\bar{V} = \frac{\bar{P}}{\bar{Q}} = \frac{a + jb}{c + jd}$$

va razionalizzata, ossia va eliminata la parte immaginaria dal denominatore. Per ottenere questo risultato si moltiplicano il numeratore ed il denominatore per il coniugato del denominatore, cioè per il numero complesso di cui solo la parte immaginaria è di segno contrario rispetto al denominatore dato, ottenendo così un denominatore reale:

$$\bar{V} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac - jad + jcb - j^2bd}{c^2 - jcd + jcd - j^2 d^2} =$$

$$= \frac{ac - jad + jcb + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\,\frac{cb - ad}{c^2 + d^2} = A + jB$$

• Esempio: dividere il vettore $\bar{P}$ per $\bar{Q}$:

$$\bar{P} = 2 + j\,1{,}2 \qquad \bar{Q} = 1{,}5 + j\,0{,}8$$

$$\bar{V} = \frac{2 + j\,1{,}2}{1{,}5 + j\,0{,}8} = \frac{2 + j\,1{,}2}{1{,}5 + j\,0{,}8} \cdot \frac{1{,}5 - j\,0{,}8}{1{,}5 - j\,0{,}8} =$$

$$= \frac{3 - j\,1{,}6 + j\,1{,}8 - j^2\,0{,}96}{2{,}25 - j^2\,0{,}64} = \frac{3{,}96 + j\,0{,}2}{2{,}89} = 1{,}36 + j\,0{,}069$$

Il valore scalare del vettore risultante è:

$$|V| = \sqrt{1{,}36^2 + 0{,}069^2} = 1{,}36$$

e l'angolo di sfasamento:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{0{,}069}{1{,}36} = \operatorname{arctg} 0{,}050 = 3^\circ \sim$$

• L'angolo di fase risultante dal quoziente di due numeri complessi è la differenza fra i rispettivi angoli di fase.

34. Numeri complessi con coordinate polari.

• Un vettore può essere rappresentato in forma rettangolare o in forma polare. I suoi componenti rettangolari sono le proiezioni del vettore su gli assi cartesiani, di cui quella sull'asse orizzontale è la componente reale, quella sull'asse verticale la componente immaginaria.

Così il vettore V, fig. 63 *a*, è scomposto in A e B e risulta rappresentato da:

$$\bar{V} = A + jB$$

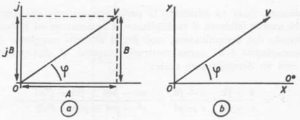


Fig. 63.

• Il vettore può essere rappresentato anche in forma polare e cioè dal suo valore scalare e dall'angolo φ ch'esso forma con l'asse di riferimento, delle X, fig. 63 *b*, e va indicato con:

$$\bar{V} = V \underline{/\varphi}$$

espressione in cui V costituisce il modulo e φ l'angolo di fase o argomento.

Ricordando che in trigonometria:

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{jB}{V} = \frac{B}{V};\ \cos\varphi = \frac{A}{V};\ \text{tg}\,\varphi = \frac{B}{A}$$

risulta che i componenti reali del vettore suddetto possono essere indicati con:

$$V = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \varphi = \text{arctg}\,\frac{B}{A}$$

$$A = V\cos\varphi \qquad B = V\,\text{sen}\,\varphi$$

• Il vettore V può quindi essere rappresentato nelle due forme:

rettangolare $\quad \bar{V} = A + jB$

e polare $\quad \bar{V} = V(\cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi)$

- È utile poter trasformare un vettore dalla forma rettangolare a quella polare, o viceversa, perchè quest'ultima forma si presta particolarmente ai calcoli algebrici, come la moltiplicazione e la divisione.

Dato ad es. un vettore:

$$\bar{V} = V \underline{/\varphi} = 7 \underline{/45^\circ}$$

per trasformarlo nel vettore:

$$\bar{V} = a + jb$$

si considera che:

$$a = V \cos \varphi = 7 \cos 45^\circ = 7 \cdot 0{,}707 = 4{,}95$$

$$jb = jV \operatorname{sen} \varphi = j\, 7 \operatorname{sen} 45^\circ = j\, 7 \cdot 0{,}707 = j\, 4{,}95$$

e risulta:

$$\bar{V} = 4{,}95 + j\, 4{,}95$$

Allo stesso modo se il vettore è:

$$\bar{V} = A + jB = 4{,}95 + j\, 4{,}95$$

$$|V| = \sqrt{4{,}95^2 + 4{,}95^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4{,}95}{4{,}95} = \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$$

e risulta:

$$\bar{V} = 7 \underline{/45^\circ}$$

Addizione.

- L'addizione di vettori polari va effettuata convertendoli prima in forma rettangolare procedendo quindi come per i numeri complessi di questa forma.
- Esempio: sommare

$$35 \underline{/40^\circ} \quad \text{e} \quad 47 \underline{/55^\circ}$$

Dopo averli trasformati in rettangolari:

$$35 \underline{/40^\circ} = 35 \cos 40^\circ + j\, 35 \operatorname{sen} 40^\circ =$$
$$= 35 \cdot 0{,}766 + j\, 35 \cdot 0{,}6428 = 26{,}81 + j\, 22{,}50$$

$$47 \underline{/55^\circ} = 47 \cos 55^\circ + j\, 47 \operatorname{sen} 55^\circ =$$
$$= 47 \cdot 0{,}5736 + j\, 47 \cdot 0{,}8192 = 26{,}96 + j\, 38{,}50$$

si ottiene:

$$(26{,}81 + j\,22{,}50) + (26{,}96 + j\,38{,}50) = 53{,}77 + j\,61$$

Per determinare l'angolo di fase:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A} = \frac{61}{52{,}77} = 1{,}134 \quad \text{e} \quad \varphi = \operatorname{arctg} 1{,}134 = 48{,}6^\circ$$

ed il modulo:

$$\cos\varphi = \frac{A}{V} \qquad V = \frac{A}{\cos\varphi} = \frac{53{,}77}{\cos 48{,}6^\circ} = \frac{53{,}77}{0{,}6613} = 81{,}13$$

$$53{,}77 + j\,61 = 81{,}13 \underline{/48{,}6^\circ}$$

Sottrazione.

• La sottrazione di due vettori polari va effettuata trasformandoli in forma rettangolare, procedendo quindi come per i numeri complessi di questa forma.

• Esempio: sottrarre da

$$51{,}4 \underline{/-10{,}5^\circ} \qquad 45{,}6 \underline{/21{,}5^\circ}$$

$$51{,}4 \underline{/-10\;5^\circ} = 50{,}5 - j\,9{,}36$$

$$45{,}6 \underline{/21\;5^\circ} = 42{,}4 - j\,16{,}7$$

$$(50{,}5 - j\,9{,}36) - (42{,}4 - j\,16{,}7) = 8{,}1 - j\,26{,}06 = 27{,}1 \underline{/-72{,}7^\circ}$$

Moltiplicazione.

• Il prodotto di due vettori polari è ottenuto moltiplicando i loro moduli e sommando i relativi angoli di fase.

• Esempio: moltiplicare

$$55 \underline{/40^\circ} \quad \text{per} \quad 47 \underline{/55^\circ}$$

$$55 \cdot 47 = 2585 \qquad 40^\circ + 55^\circ = 95^\circ$$

$$55 \underline{/40^\circ} \cdot 47 \underline{/55^\circ} = 2585 \underline{/95^\circ}$$

Divisione.

• Il quoziente di due vettori polari è ottenuto dividendo fra loro i moduli ed effettuando la differenza fra i relativi angoli.

• Esempio: dividere

$$55 \underline{/40^\circ} \quad \text{per} \quad 47 \underline{/55^\circ}$$

$$\frac{55}{47} = 1{,}17 \qquad 40^\circ - 55^\circ = -15^\circ$$

$$\frac{55 \underline{/40^\circ}}{47 \underline{/55^\circ}} = 1{,}17 \underline{/-15^\circ}$$

Elevazione a potenza.

• Per elevare a potenza un vettore polare si eleva a potenza il modulo e si moltiplica l'angolo di fase per l'esponente.

• Esempio:

$$(15 \underline{/20^\circ})^2 = 225 \underline{/40^\circ}$$

Estrazione di radice.

• Per estrarre la radice di un vettore polare si estrae la radice del modulo e si divide l'angolo di fase per l'indice della radice.

• Esempio:

$$\sqrt{10 \underline{/50^\circ}} = 3{,}16 \underline{/25^\circ}$$

35. Numeri complessi in forma esponenziale.

• La soluzione dei problemi di radiotecnica richiede l'uso delle quattro operazioni fondamentali sui numeri complessi. La forma rettangolare con cui questi sono normalmente espressi si presta in particolar modo alla somma ed alla sottrazione, mentre le altre due operazioni sono facilitate oltre che dalla forma polare, dall'uso di una terza forma detta esponenziale. Essa si presenta per un vettore:

$$\dot{Z} = R + jX$$

sotto la forma:

$$\dot{Z} = Z\,\varepsilon^{j\varphi}$$

in cui ε (epsilon) è la base dei logaritmi neperiani, $\varepsilon = 2{,}718$.

Questa forma è un prodotto algebrico in cui la quantità ε è elevata alla potenza $j\varphi$. Poichè questa forma è più complicata da scrivere la si pone sovente sotto la forma polare, pertanto:

$$\dot{Z} = R + jX = Z\,\varepsilon^{j\varphi} = Z \underline{/\varphi}$$

• La moltiplicazione dei numeri complessi in forma esponenziale è ottenuta applicando la regola per il prodotto di potenze con la stessa base, cioè effettuando la somma degli esponenti dei fattori esponenziali ed il prodotto delle altre quantità:

$$A\,\varepsilon^{j\alpha} \cdot B\,\varepsilon^{j\varphi} = A\,B\,\varepsilon^{j(\alpha+\varphi)}$$

- Esempi:

$$125\,\varepsilon^{j30°}\ \mathrm{V} \cdot 3\,\varepsilon^{j15°}\ \mathrm{A} = 375\,\varepsilon^{j45°}\ \mathrm{W}$$

$$125\,\varepsilon^{j360°}\ \mathrm{V} \cdot 3\,\varepsilon^{j0°}\ \mathrm{A} = 375\ \mathrm{W}$$

- La divisione fra numeri complessi in forma esponenziale è ottenuta applicando la regola per il quoziente fra due potenze con la stessa base per i fattori esponenziali e la divisione per le altre quantità:
- Esempi:

$$A\,\varepsilon^{j\alpha} : B\,\varepsilon^{j\varphi} = \frac{A}{B}\,\varepsilon^{j(\alpha-\varphi)}$$

$$6\,\varepsilon^{j75°} : 3\,\varepsilon^{j45°} = \frac{6}{3}\,\varepsilon^{j(75°-45°)} = 2\,\varepsilon^{j30°}$$

$$9\,\varepsilon^{j30°} : 3\,\varepsilon^{j45°} = \frac{9}{3}\,\varepsilon^{j(30°-45°)} = 3\,\varepsilon^{j-15°} = 3\,\varepsilon^{j345°}$$

36. Numeri complessi in elettrotecnica.

- Si possono estendere alle correnti alternate le formule valevoli per le correnti continue, indicando le grandezze alternative, tensioni e correnti, con i corrispondenti numeri complessi e sostituendo le resistenze con le impedenze (anche complesse).

Esempio: per la c.c. $V = R\,I$; per la c.a. $\bar{V} = Z\,\bar{I}$.

- La reattanza induttiva è data da:

$$X_L = \omega\,L$$

quella capacitiva dà:

$$X_C = \frac{1}{\omega\,C}$$

- L'impedenza la cui espressione simbolica è:

$$\bar{Z} = R + jX$$

è una grandezza vettoriale, un operatore complesso la cui parte reale rappresenta la resistenza del circuito, quella immaginaria la reattanza dello stesso, di segno positivo se la reattanza è induttiva; il valore scalare di questo vettore è dato da:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

e l'angolo di fase fra la corrente e la tensione:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}$$

Se l'impedenza risulta:

$$Z = R - jX$$

l'ampiezza o valore scalare è ancora lo stesso di quello precedentemente trovato ma l'angolo di fase è:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-X}{R}$$

perchè la reattanza è capacitiva.

L'ampiezza è quindi indipendente dal segno della parte reale e della parte immaginaria, solo l'angolo di fase ne è influenzato.

• L'ammettenza è l'inverso dell'impedenza:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} =$$

$$= \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G - jB$$

Il valore scalare dell'ammettenza è:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \text{ mho}$$

e l'angolo di fase:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-X}{R}$$

• La parte reale del numero complesso relativo all'ammettenza ne costituisce la conduttanza:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} \text{ mho}$$

la parte immaginaria la suscettanza:

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2} \text{ mho}$$

R, X e Z sono misurate in ohm; G, B ed Y sono misurate in mho o siemens.

• Una impedenza induttiva è sempre rappresentata da $a + jb$, mentre una impedenza capacitiva lo è da $a - jb$; una ammettenza induttiva è rappresentata da $a - jb$ ed una capacitiva da $a + jb$.

• Esempio: si voglia calcolare la caduta di tensione prodotta dal passaggio di una corrente $\bar{I} = i_1 + ji_2$ in un'impedenza induttiva $\bar{Z} = r + jx$.

Dal loro prodotto si ottiene:

$$\bar{V} = \bar{I}\,\bar{Z} = (i_1 + ji_2)(r + jx) = i_1 r + ji_1 x + ji_2 r + j^2 i_2 x =$$

$$= (i_1 r - i_2 x) + j\,(i_1 x + i_2 r)$$

Il valore della tensione è:

$$|V| = \sqrt{(i_1 r - i_2 x)^2 + (i_1 x + i_2 r)^2}$$

Se l'impedenza del circuito è capacitiva:

$$\bar{V} = \bar{I}\,\bar{Z} = (i_1 + ji_2)(r - jx) = (i_1 r + i_2 x) + j\,(i_2 r - i_1 x)$$

il valore della tensione è:

$$|V| = \sqrt{(i_1 r + i_2 x)^2 + (i_2 r - i_1 x)^2}$$

• Esempio: determinare il vettore rappresentante la corrente ottenuta applicando una tensione $\bar{E} = e_1 + je_2$ ad un circuito con impedenza induttiva $\bar{Z} = r + jx$:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{e_1 + je_2}{r + jx} = \frac{e_1 + je_2}{r + jx} \cdot \frac{r - jx}{r - jx} = \frac{e_1 r - je_1 x + je_2 r - j^2 e_2 x}{r^2 - j^2 x^2} =$$

$$= \frac{(e_1 r + e_2 x) + j\,(e_2 r - e_1 x)}{r^2 + x^2} = \frac{e_1 r + e_2 x}{r^2 + x^2} + j\,\frac{e_2 r - e_1 x}{r^2 + x^2}$$

In un circuito con impedenza capacitiva la corrente risulta:

$$\bar{I} = \frac{e_1 + je_2}{r - jx} \cdot \frac{r + jx}{r + jx} = \frac{e_1 r - e_2 x}{r^2 + x^2} + j\,\frac{e_2 r + e_1 x}{r^2 + x^2}$$

• Da questi esempi si può rilevare che l'uso dei numeri complessi per la risoluzione di problemi relativi a semplici circuiti in serie non costituisce una semplificazione dei calcoli e risulta più pratico effettuare questi con i valori scalari. Per i circuiti in parallelo, o serie parallelo, l'uso dei numeri complessi fa realizzare invece una notevole semplificazione, come si può rilevare dai problemi svolti nella sezione corrispondente ad essi.

• La potenza media dissipata in un circuito è:

$$P = V\,I \cos \varphi$$

in cui V ed I sono i valori efficaci e:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

• Se la tensione e la corrente sono espresse in forma complessa la potenza dissipata è data dalla somma algebrica dei prodotti delle parti reali e delle parti immaginarie:

$$\bar{V} = v_1 + jv_2$$

$$\bar{I} = i_1 + ji_2$$

$$P = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

• La potenza totale dissipata in un circuito è la somma aritmetica delle potenze dissipate nei vari rami di esso.

• Nel caso di circuiti in parallelo si può operare come segue.
In un circuito l'ammettenza dei rami in parallelo è la somma algebrica delle ammettenze separate:

$$Y = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + ...$$

Si calcolano le conduttanze $G = R/Z^2$ e le suscettanze di ciascun ramo

$B = X/R^2$. Si calcola l'ammettenza combinata:

$$Y = (G_1 + jB_1) + (G_2 + jB_2) + ...$$

Si prende il reciproco dell'ammettenza combinata per trovare l'impedenza del circuito.

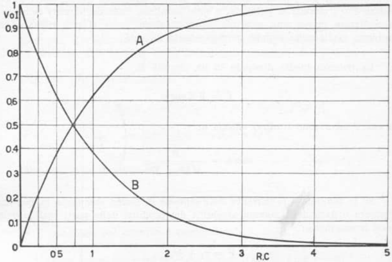


Fig. 64.

A: tensione di carica del condensatore.

B: tensione di scarica del condensatore o corrente di carica del condensatore.

37. Funzioni esponenziali.

• La tabella XI sulle funzioni esponenziali è utile per risolvere i problemi relativi alle costanti di tempo di circuiti a resistenza capacità. Nella equazione $V_c = V_b\,(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}})$, relativa alla tensione che si ha fra le armature di un condensatore durante la carica, ed in quella $V_c = V_b\,\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$, relativa alla tensione che si ha fra le armature di un condensatore durante la scarica, si ha la base dei logaritmi naturali, $\varepsilon = 2{,}718$, elevata ad un esponente negativo. Dalla tabella XI si ricavano i valori sia del rapporto tempo-costante di tempo e sia della suddetta potenza da introdurre nei problemi.

TABELLA XI.

Funzioni esponenziali.

$\frac{t}{RC}$	$\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$	$\frac{t}{RC}$	$\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$	$\frac{t}{RC}$	$\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$	$\frac{t}{RC}$	$\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$
0,00	1	0,65	0,522	1,6	0,201	5	0,006
0,05	0,951	0,70	0,496	1,7	0,182	5,5	0,004
0,1	0,904	0,75	0,472	1,8	0,165	6	0,002
0,15	0,860	0,80	0,449	1,9	0,149		
0,20	0,818	0,85	0,427	2	0,135		
0,25	0,778	0,90	0,406	2,2	0,110		
0,30	0,740	0,95	0,386	2,4	0,090		
0,35	0,704	1	0,367	2,6	0,074		
0,40	0,670	1,1	0,332	2,8	0,060		
0,45	0,637	1,2	0,301	3	0,049		
0,50	0,606	1,3	0,272	3,5	0,030		
0,55	0,576	1,4	0,246	4	0,018		
0,60	0,548	1,5	0,223	4,5	0,011		

PARTE SECONDA

PROBLEMI

FORMULARIO I

Circuiti.

Carica di un elettrone $1{,}59 \cdot 10^{-11}$ (Coulomb).

Corrente 1 A costituita da $6{,}3 \cdot 10^{18}$ elettroni al secondo.

Resistività $\rho_t = \rho\,(1 + \alpha\, t)$ $\Omega/\text{mm}^2/\text{m}$ a $t_0 = 20\ {}^\circ\text{C}$

t differenza di temperatura rispetto t_0; α coefficiente di temperatura per °C.

Resistenza $R = \rho \dfrac{l}{s}$ (Ohm).

Resistenza $R = V/I = P/I^2 = V^2/P$ (Ohm)

Resistenze in serie $R_t = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$

Resistenze in parallelo $R_p = \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$; $\dfrac{1}{R_p} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \ldots$

Tabella XII.

Resistività e coefficiente di temperatura.

Materiale	Resistività ρ a 20 °C $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$	Resistenza relativa al rame	Coefficiente di temperatura α per °C
Alluminio	0,028	1,62	0,0042
Argentana	0,37	21,5	0,00017
Argento	0,016	0,93	0,0038
Carbone (grafite)	9	520	— 0,0010
Costantana	0,49	28,5	0,00003
Ferro	0,10	5,8	0,0050
Nichel	0,078	4,53	0,006
Nichelcromo	1,03	60	0,00011
Rame	0,0172	1	0,00427
Tungsteno	0,055	3,2	0,0045

Corrente $I = V/R = P/V = \sqrt{P/R}$ (Ampere).

Legge generalizzata di Ohm $I = \dfrac{E}{R_i + R_c}$

E f.e.m.; R_i resistenza interna del generatore; R_c resistenza di carico.

Tensione $V = R\,I = P/I = \sqrt{R\,P}$ (Volt).

Potenza $P = V\,I = R\,I^2 = V^2/R$ (Watt).

Energia $W = R\,I^2\,t$ (Joule); $W = 0{,}00024\,I^2\,R\,t$ (kCal).
1 Cal = 4185 joule.

Partitore di tensione $V_2 = \dfrac{V_{tot}\,R_2}{R_1 + R_2}$.

1° principio di Kirchhoff: la somma delle intensità delle correnti circolanti in un nodo di un circuito è di valore nullo (le correnti + sono dirette verso il nodo, — sono dirette in senso inverso).

2° principio di Kirchhoff: in una maglia di conduttori, comprendenti varie sorgenti di f.e.m., la somma delle cadute di tensione ($R\,I$) lungo i conduttori e delle f.e.m. è di valore nullo (alle cadute di tensione ed alle f.e.m. va attribuito un segno + o — secondo il loro senso, rispetto al verso con cui si percorre la maglia).

Strumenti di misura.

Resistenza in derivazione $R_d = \dfrac{R_i}{m - 1}$

R_i resistenza interna; m potere moltiplicatore.

Resistenza in serie $R_s = R_i\,(m - 1)$.

Errore assoluto $e_a = A_i - A_e$
A_i valore indicato: A_e valore effettivo.

Errore relativo $e_r = \dfrac{A_i - A_e}{A_e}$.

Errore relativo in % $e = e_r \cdot 100$.

Circuito magnetico.

Permeabilità dell'aria $\mu_0 = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ (Henry/m).

Permeabilità effettiva $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
μ_r permeabilità relativa.

Induzione $B = \mu_0 \mu_r H$ (Weber/m²).

Forza magnetica $H = N I/l$ (Amperspire/m).

Flusso $\Phi = B s = \mu \frac{N I}{l} s = \frac{N I}{R}$ (Weber).

Riluttanza $R = \frac{l}{\mu s}$ (Amperspire/Weber).

Forza magnetomotrice $F = R \Phi = \frac{l \Phi}{\mu s}$ (Amperspire).

Energia nel campo magnetico $W = 0{,}5 L I^2$ (Joule).

Autoinduzione.

F.e.m. indotta in una spira $E = \Delta \Phi / \Delta t$ (Volt).

Induttanza di una bobina cilindrica $L = 0{,}01 \frac{N^2 D^2}{l}$ (μH).

Induttanza di una bobina a nido d'api $L = \frac{0{,}2 D^2 N^2}{7{,}6 D + 22{,}8 l + 25{,}4 s}$ (H).

Mutua induzione.

F.e.m. indotta $E = M \frac{\Delta I}{\Delta t}$ (V).

Mutua induzione $M = \frac{L_1 - L_2}{4}$ (H).

Coefficiente di accoppiamento $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.

Induttanza di 2 bobine in serie accoppiate $L = L_1 + L_2 \pm 2 M$ (H).

Campo elettrico.

Capacità fra due lamine parallele in aria $C = 8{,}85 \frac{s}{d}$ (pF)
s in m², d in m.

Capacità fra due lamine parallele con dielettrico diverso dall'aria

$C = 8{,}85 \varepsilon \frac{s}{d}$ (pF).
ε costante dielettrica.

Carica di un condensatore $Q = C\,V$ (Coulomb)
C farad, V volt.

Capacità di condensatori in parallelo $C_t = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$

Capacità di condensatori in serie $C_p = \dfrac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2}$; $C_p = \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3} + \dots}$.

Capacità di n condensatori uguali in serie $C = C_1/n$.

Energia nel campo elettrico $W = 0{,}5\;C\;V^2$ (Joule).

CORRENTE

Problema 1. Quanti elettroni costituiscono la quantità di elettricità di 1 coulomb?

Soluzione. Ogni elettrone ha una carica corrispondente a $1{,}59 \cdot 10^{-19}$ C. La quantità di elettricità di 1 coulomb è costituita da:

$$1/1{,}59 \cdot 10^{-19} = 10^{19}/1{,}59 = (10/1{,}59)\,10^{18} = 6{,}3 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$$

Problema 2. Quanti elettroni circolano ogni secondo in un conduttore percorso da una corrente di 20 mA?

Soluzione. Il flusso di elettroni al secondo corrispondente ad una corrente di 1 A è di $6{,}3 \cdot 10^{18}$ elettroni/sec. Il numero di elettroni/sec corrispondente ad una corrente di 20 mA è:

$$n = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}3 \cdot 10^{18} = 126 \cdot 10^{15} \text{ elettroni/sec}$$

Problema 3. Qual è l'intensità di corrente che percorre un circuito elettrico se in esso si ha uno spostamento di 10^{19} elettroni in un'ora?

Soluzione. Il tempo: $t = 1$ h $= 3600$ sec.

L'intensità della corrente è data dal rapporto fra il numero di elettroni che circolano e quelli corrispondenti ad una corrente di 1 A, cioè $6{,}3 \cdot 10^{18}$ elettroni/sec.

$$I = \frac{10^{19}}{6{,}3 \cdot 10^{18} \cdot 3600} = \frac{10^{19}}{2{,}26 \cdot 10^{22}} = \frac{1}{2{,}26 \cdot 10^{3}} = 0{,}44 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 0{,}44 \text{ mA}$$

Problema 4. Quanto pesa un filo di rame nudo del diametro di 0,5 mm e lungo 135 m, se il peso specifico del rame è di 8,9 g/cm³?

Soluzione. Il volume del filo è:

$$V = \pi r^2 l = 3{,}14 \cdot 0{,}25^2 \cdot 135\,000 = 26\,460 \text{ mm}^3 = 26{,}46 \text{ cm}^3$$

Il peso:

$$P = 26{,}46 \cdot 8{,}9 = 235 \text{ g}$$

Problema 5. Quanto è lungo il filo di rame nudo, di 0,35 mm di diametro, contenuto in un rocchetto il cui peso è di 0,500 kg e la cui tara è di 175 g? Il peso specifico del rame è di 8,9 g/cm³.

Soluzione. Il peso netto del filo di rame è di 500 — 175 = 325 g.

Il volume di ogni metro di filo è:

$$V = \pi r^2 l = 3{,}14 \cdot 0{,}175^2 \cdot 1000 = 96 \text{ mm}^3 = 0{,}096 \text{ cm}^3$$

Il peso di ogni metro di filo è:

$$P = 0{,}096 \cdot 8{,}9 = 0{,}854 \text{ g}$$

La lunghezza del filo è:

$$L = 325/0{,}854 = 380 \text{ m circa}$$

RESISTENZA

Problema 6. Qual è la resistenza di un filo di rame del diametro di 0,25 mm e della lunghezza di 1000 m a 20 °C? Qual'è la resistenza di un conduttore di alluminio dello stesso diametro e lunghezza?

Soluzione. Nella formula per il calcolo della resistenza di un conduttore:

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

va introdotto il valore della resistività del rame a 20 °C, cioè:

$$\rho = 0{,}017 \ \Omega/\text{mm}^2/\text{m}$$

La sezione del conduttore è:

$$s = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 0{,}125^2 = 0{,}047 \text{ mm}^2$$

La resistenza del conduttore in rame è:

$$R = 0{,}017 \frac{1000}{0{,}047} = \frac{17}{0{,}047} = 361{,}6 \ \Omega$$

La resistenza del conduttore in alluminio ($\rho = 0{,}03\ \Omega/mm^2/m$ a 20 °C) è:

$$R = 0{,}03\ \frac{1000}{0{,}047} = 638{,}2\ \Omega$$

Problema 7. Quale diametro deve avere un conduttore di alluminio che abbia la stessa lunghezza e resistenza di un conduttore di rame di 0,5 mm di diametro?

Soluzione. Se la resistività del rame è $\rho = 0{,}017\ \Omega/mm^2/m$ e quella dell'alluminio $\rho = 0{,}028\ \Omega/mm^2/m$, la sezione del conduttore di alluminio deve aumentare nello stesso rapporto esistente fra le due resistività suddette perchè la resistenza risulti costante:

$$0{,}028/0{,}017 = 1{,}64$$

La sezione del conduttore di rame è:

$$s = \pi\, r^2 = 3{,}14 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}194\ mm^2$$

e quella del conduttore in alluminio:

$$s = 0{,}194 \cdot 1{,}64 = 0{,}318\ mm^2$$

da cui:

$$d = \sqrt{\frac{4\,s}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}318}{3{,}14}} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}63\ mm$$

Problema 8. Tre resistori di 10, 5 e 4 ohm sono collegati prima in serie fra loro quindi in parallelo. Quali valori assume la resistenza totale nei due casi?

Soluzione. Effettuato il collegamento in serie dei tre resistori la resistenza totale risultante è:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 10 + 5 + 4 = 19\ \Omega$$

Effettuato il collegamento in parallelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2}{20} + \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20}$$

da cui:

$$R = \frac{20}{11} = 1{,}818\ \Omega$$

Problema 9. Due resistori, collegati in serie fra loro, presentano una resistenza totale di 100 ohm; collegati in parallelo fra loro presentano una resistenza di 10 ohm. Quali sono i loro valori?

Soluzione. Con il collegamento in serie:

$$100 = R_1 + R_2 \tag{1}$$

con il collegamento in parallelo:

$$10 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2}{100};$$

quindi:

$$R_1 R_2 = 10 \cdot 100 = 1000 \tag{2}$$

Dalla (1) $R_1 = 100 - R_2$ che sostituito nella (2):

$$(100 - R_2) R_2 = 100 R_2 - R_2^2 = 1000$$

$$R_2^2 - 100 R_2 + 1000 = 0$$

equazione di 2° grado la cui soluzione è:

$$R_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{100 \pm \sqrt{10\,000 - 4000}}{2} =$$

$$= \frac{100 \pm \sqrt{6000}}{2} = \frac{100 \pm 77{,}45}{2}.$$

Questo resistore può avere i valori:

$$R_2 = \frac{100 + 77{,}45}{2} = 88{,}72\ \Omega;$$

$$R_2 = \frac{100 - 77{,}45}{2} = 11{,}27\ \Omega.$$

I valori di R_1 sono ottenuti sostituendo uno di questi valori nella (1):

$$R_1 = 100 - 88{,}72 = 11{,}28\ \Omega$$

$$R_1 = 100 - 11{,}27 = 88{,}73\ \Omega$$

Problema 10. Tre resistori sono collegati in parallelo fra loro e la resistenza risultante ha il valore di 50 ohm. Di essi uno è di 150 ohm, il secondo di 250 Ω; di quale valore deve essere il terzo per ottenere la resistenza complessiva suddetta?

Soluzione. Si trovi il valore corrispondente al collegamento in parallelo dei due resistori di valore noto:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{150 \cdot 250}{150 + 250} = \frac{37\,500}{400} = 93{,}7\ \Omega$$

Poichè:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_x}$$

risulta:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_p} = \frac{1}{50} - \frac{1}{93{,}7} = \frac{93{,}7}{4685} - \frac{50}{4685} = \frac{43{,}7}{4685}$$

da cui:

$$R_x = \frac{4685}{43{,}7} = 107\ \Omega$$

Problema 11. Un ohmmetro collegato fra i morsetti A e B del circuito di fig. 65 indica una resistenza di 300 ohm. Quale valore di resistenza ha ognuno dei resistori R_x, uguali fra loro?

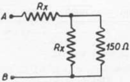


Fig. 65.

Soluzione. La resistenza indicata dall'ohmmetro corrisponde alla somma del valore di R_x e del parallelo dei due resistori R_x e di 150 ohm:

$$300 = \frac{150\, R_x}{150 + R_x} + R_x = \frac{150\, R_x + R_x\,(150 + R_x)}{150 + R_x} =$$

$$= \frac{150\, R_x + R_x^2 + 150\, R_x}{150 + R_x} = \frac{300\, R_x + R_x^2}{150 + R_x}$$

moltiplicando i due membri dell'uguaglianza per $150 + R_x$:

$$45\,000 + 300\, R_x = 300\, R_x + R_x^2$$

$$R_x^2 = 45\,000 \qquad R_x = \sqrt{45\,000} = 212{,}5\ \Omega.$$

Problema 12. Con tre resistori quanti valori di resistenza si possono ottenere? Calcolare i valori di tutte le possibili combinazioni realizzabili con i seguenti resistori: $A = 1{,}8\ \Omega$; $B = 3{,}4\ \Omega$; $C = 6{,}6\ \Omega$.

Soluzione. Le combinazioni possibili sono 17, cioè: A; B; C; A e B in parallelo; A e C in parallelo; B e C in parallelo; A, B e C in parallelo; A e B in serie; A e C in serie; B e C in serie; A, B e C in serie; B e C in serie con A in parallelo; A e C in serie con B in parallelo; A e B in serie con C in parallelo; B e C in parallelo con A in serie; A e C in parallelo con B in serie; A e C in parallelo con B in serie.

I valori realizzabili con i resistori suddetti (scelti in modo da risultare nel rapporto di 11/6 fra loro per fornire valori di combinazioni che risultino in rapporto relativo di 6/5) sono i seguenti: 1; 1,2; 1,4; 1,55; 1,8; 2,2; 2,4; 2,8; 3,4; 4; 4,8; 5,2; 6,2; 7,4; 8; 9,6; 11,5.

Problema 13. Con il minimo numero di resistori di 10 Ω ciascuno si effettui una disposizione in serie ed in parallelo per ottenere una resistenza complessiva di 7,5 Ω.

Soluzione. Collegando due resistori in serie si ha una resistenza somma dei valori dei due. Collegando in parallelo due resistori di uguale valore si ha una resistenza di valore metà, collegandone in parallelo tre una resistenza risultante di valore un terzo.

Collegando due resistori di 10 Ω ciascuno in parallelo si ottiene una resistenza di 5 Ω.

Collegando quattro resistori di 10 Ω ciascuno in parallelo si ottiene una resistenza di 2,5 Ω.

Collegando in serie i due gruppi suddetti di resistori si ottiene una resistenza totale di 7,5 Ω.

TENSIONE

Problema 14. Ad un circuito, costituito da tre resistori, $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 45\ \text{k}\Omega$ ed $R_3 = 0{,}5\ \text{k}\Omega$, collegati in serie fra loro, è applicata una tensione di 150 V. Quale corrente vi circola e quale caduta di tensione si verifica su ogni resistore?

Soluzione. La resistenza totale del circuito è:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 10 \cdot 10^3 + 45 \cdot 10^3 + 0{,}5 \cdot 10^3 = 55{,}5 \cdot 10^3\ \Omega$$

La corrente nel circuito è:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{150}{55{,}5 \cdot 10^3} = 2{,}72 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 2{,}7\ \text{mA}$$

Le singole cadute di tensione sono:

$$V_1 = R_1 I = 10 \cdot 10^3 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} = 27 \text{ V}$$
$$V_2 = R_2 I = 45 \cdot 10^3 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} = 121{,}5 \text{ V}$$
$$V_3 = R_3 I = 0{,}5 \cdot 10^3 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} = 1{,}35 \text{ V}$$

Problema 15. Il circuito di fig. 66 è costituito da tre resistori, con i valori indicati. Calcolare il valore della corrente che vi circola, quelli delle correnti

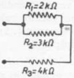


Fig. 66.

nei rami derivati e le cadute di tensione che si verificano sulle singole resistenze applicando al circuito una tensione di 150 V.

Soluzione. Il valore della resistenza totale R del circuito è dato dalla somma di R_3 con il valore risultante dal parallelo di R_1 ed R_2; quest'ultimo è:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3} = \frac{6 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^3} = 1{,}2 \cdot 10^3 \ \Omega$$

$$R = R_3 + R_p = 4 \cdot 10^3 + 1{,}2 \cdot 10^3 = 5{,}2 \cdot 10^3 \ \Omega$$

La corrente nel circuito è:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{150}{5{,}2 \cdot 10^3} = 28{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 28{,}8 \text{ mA}$$

Per calcolare le correnti parziali nei resistori R_1 ed R_2 occorre calcolare la caduta di tensione che si verifica su di essi:

$$V_p = R_p I = 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 28{,}8 \cdot 10^{-3} = 34{,}56 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{V_p}{R_1} = \frac{34{,}56}{2 \cdot 10^3} = 17{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 17{,}28 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{V_p}{R_2} = \frac{34{,}56}{3 \cdot 10^3} = 11{,}52 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 11{,}52 \text{ mA}$$

La caduta di tensione su R_3 è:

$$V_3 = R_3 I = 4 \cdot 10^3 \cdot 28{,}8 \cdot 10^{-3} = 115{,}2 \text{ V}$$

Problema 16. Quale tensione va applicata ad un circuito, con schema identico a quello del problema 15, perchè in esso circoli una corrente di 42 mA? I resistori hanno i valori seguenti: $R_1 = 3$ kΩ, $R_2 = 5$ kΩ, $R_3 = 7$ kΩ.

Soluzione. Con il parallelo di R_1 ed R_2 si ha una resistenza:

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3} = \frac{15 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^3} = 1{,}87 \cdot 10^3 \ \Omega$$

La resistenza totale del circuito risulta:

$$R = R_p + R_3 = 1{,}87 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3 = 8{,}87 \cdot 10^3 \ \Omega$$

La tensione da applicare al circuito sarà:

$$V = R \cdot I = 8{,}87 \cdot 10^3 \cdot 42 \cdot 10^{-3} = 372{,}5 \text{ V}$$

Problema 17. Un accumulatore da 6 V alimenta il circuito dei filamenti di un ricevitore a 5 valvole, collegati in parallelo. Un amperometro, inserito su uno dei conduttori di collegamento, indica una corrente di 2 A. Qual è la resistenza totale offerta da tutti i filamenti? Se la quinta valvola richiede 0,75 A per l'accensione del suo filamento quale sarà la resistenza di questo? Quale resistenza hanno i filamenti delle altre valvole, supposte dello stesso tipo?

Soluzione. La resistenza del circuito dei filamenti è:

$$R = V/I = 6/2 = 3 \ \Omega$$

La resistenza del filamento della valvola con maggior consumo è:

$$R_5 = 6/0{,}75 = 8 \ \Omega$$

Nei filamenti delle altre quattro valvole si ha il passaggio di 1,25 A cioè di $1{,}25/4 = 0{,}313$ A in ognuno di essi e la resistenza singola risulta:

$$R = 6/0{,}313 = 19{,}1 \ \Omega$$

Problema 18. Quando l'accumulatore del problema 17 è completamente carico si ha fra i suoi morsetti una tensione di 7,5 V. Per impedire che nel circuito dei filamenti la corrente superi il valore di 2 A si inserisce nel circuito un resistore regolabile (reostato): quale sarà il valore massimo della sua resistenza?

Soluzione. La massima caduta di tensione che si deve verificare sul reostato è di $7{,}5 - 6 = 1{,}5$ V, con una corrente di 2 A, e la sua resistenza massima sarà:

$$R = V/I = 1{,}5/2 = 0{,}75\ \Omega$$

Problema 19. Una batteria di pile è costituita da 50 elementi ognuno dei quali ha una f.e.m. di 1,6 V e una resistenza interna $r = 0{,}5\ \Omega$. Quale tensione risulta applicata ad un resistore di $R_1 = 250\ \Omega$ collegato ai suoi morsetti? Quale tensione risulta su di un resistore $R_2 = 25\ \Omega$?

Soluzione. La f.e.m. della batteria è $E = 50 \cdot 1{,}6 = 80$ V, la cui resistenza interna $R_i = 50 \cdot 0{,}5 = 25\ \Omega$.

La tensione disponibile ai morsetti, con la resistenza di carico di 250 Ω è di:

$$V = R\,I = R\,\frac{E}{R_i + R_1} = \frac{80 \cdot 250}{25 + 250} = \frac{20\,000}{275} = 75{,}8 \text{ V circa.}$$

Inserendo la resistenza R_2 la tensione disponibile è:

$$V = \frac{80 \cdot 25}{25 + 25} = \frac{2000}{50} = 40 \text{ V.}$$

Problema 20. Se nel circuito di fig. 67 si invertono le posizioni del generatore e dello strumento di misura si otterrà la medesima indicazione dallo strumento? Le resistenze interne del generatore e dello strumento sono considerate nulle.

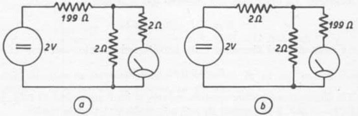


Fig. 67.

Soluzione. Il circuito è in fig. 67 *a*. La corrente fornita dal generatore ha l'intensità:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{2}{200} = 0{,}01 \text{ A}$$

metà di questa corrente circola nello strumento, che fornirà una indicazione di 5 mA.

Il circuito di fig. 67 *b* risulta dallo scambio delle posizioni del generatore e dello strumento.

La resistenza del circuito è:

$$R = 2 + \frac{2 \cdot 199}{2 + 199} = 2 + \frac{398}{201} = 3{,}98\ \Omega.$$

La corrente fornita dal generatore al circuito ha il valore:

$$I = \frac{2}{3{,}98} = 0{,}505\ \mathrm{A}.$$

Nello strumento circolerà un centesimo circa della corrente che attraversa il circuito, perchè in serie allo strumento è inserita la resistenza di 199 Ω, cento volte maggiore di quella di 2 Ω, e cioè praticamente 5 mA.

Nei due circuiti l'indicazione fornita dallo strumento è praticamente uguale.

POTENZA

Problema 21. Quali valori della potenza dissipata corrispondono a correnti di 0,1-0,2-0,3-0,4-0,5 ed 1 A in una resistenza di 10 Ω?

Soluzione. A mezzo della formula:

$$P = R\,I^2$$

$$P = 10 \cdot 0{,}1^2 = 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1\ \mathrm{W}$$
$$P = 10 \cdot 0{,}2^2 = 10 \cdot 0{,}04 = 0{,}4\ \mathrm{W}$$
$$P = 10 \cdot 0{,}3^2 = 10 \cdot 0{,}09 = 0{,}9\ \mathrm{W}$$
$$P = 10 \cdot 0{,}4^2 = 10 \cdot 0{,}16 = 1{,}6\ \mathrm{W}$$
$$P = 10 \cdot 0{,}5^2 = 10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5\ \mathrm{W}$$
$$P = 10 \cdot 1^2 = 10 \cdot 1 = 10\ \mathrm{W}$$

Problema 22. Quali valori di tensione risultano su di una resistenza di 10 Ω quando in questa sono dissipate potenze di 0,1-0,5-1-2-5 e 10 W?

Soluzione. Dalla formula: $P = V^2/R$, si ha: $V = \sqrt{P\,R}$.

$$V = \sqrt{0{,}1 \cdot 10} = \sqrt{1} = 1\ \mathrm{V}$$
$$V = \sqrt{0{,}5 \cdot 10} = \sqrt{5} = 2{,}2\ \mathrm{V}$$
$$V = \sqrt{1 \cdot 10} = \sqrt{10} = 3{,}16\ \mathrm{V}$$

$$V = \sqrt{2 \cdot 10} = \sqrt{20} = 4{,}47 \text{ V}$$
$$V = \sqrt{5 \cdot 10} = \sqrt{50} = 7 \text{ V}$$
$$V = \sqrt{10 \cdot 10} = \sqrt{100} = 10 \text{ V}$$

Problema 23. Qual è il valore della potenza dissipata dai filamenti delle valvole del problema 18? Quando la tensione dell'accumulatore aumenta sino a 7,5 V, per la carica, e si inserisce il reostato di 0,75 Ω per mantenere costante la corrente, aumenta la potenza dissipata dei filamenti? Qual è la potenza dissipata dal reostato? Qual è il valore della potenza dissipata nel circuito con tutto il reostato inserito?

Soluzione. La potenza dissipata nei filamenti è:

$$P_v = V\,I = 6 \cdot 2 = 12 \text{ W}$$

La potenza dissipata nei filamenti resta costante perchè il reostato è regolato per mantenere costante la corrente a 2 A e quindi risulta costante anche la caduta di tensione sui filamenti.

Quando è tutto inserito il reostato dissipa una potenza data dal prodotto della corrente per l'aumento di tensione dell'accumulatore:

$$P_r = V\,I = 1{,}5 \cdot 2 = 3 \text{ W}$$

La somma delle due potenze suddette è quella massima dissipata nel circuito:

$$P = 12 + 3 = 15 \text{ W}$$

Problema 24. Per ottenere correnti di 1 A o di 0,5 A o di 0,25 A in un resistore di 50 Ω si inseriscono tre resistori, fra esso e la rete a 125 V, con un commutatore, collegato come in fig. 68. Calcolare il valore di ognuno dei resistori da inserire e la massima potenza dissipata da ognuno.

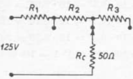


Fig. 68.

Soluzione. Per ottenere una corrente di 1 A deve risultare:

$$R_1 + R_c = R_1 + 50 = \frac{125}{1} = 125 \text{ } \Omega$$

$$R_1 = 125 - 50 = 75 \text{ } \Omega$$

Per la corrente di 0,5 A:

$$R_1 + R_2 + 50 = \frac{125}{0{,}5} = 250\ \Omega \qquad R_2 = 250 - (50 + 75) = 125\ \Omega$$

Per la corrente di 0,25 A:

$$R_1 + R_2 + R_3 + 50 = \frac{125}{0{,}25} = 500\ \Omega$$

$$R_3 = 500 - (50 + 75 + 125) = 250\ \Omega$$

Per la R_1 si ha una potenza dissipata $P = 75 \cdot 1^2 = 75$ W.
Per la R_2 si ha una potenza dissipata $P = 125 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25$ W.
Per la R_3 si ha una potenza dissipata $P = 250 \cdot 0{,}25^2 = 15{,}6$ W.

Problema 25. Un trasformatore fornisce, col suo avvolgimento secondario a 6,3 V, una potenza di 10 W ai filamenti di un ricevitore. Qual è la corrente richiesta da questi? Qual è la loro resistenza totale? Se delle quattro valvole il filamento di una di esse richiede una corrente doppia degli altri quale è il valore della sua resistenza?

Soluzione. La corrente richiesta è:

$$I = W/V = 10/6{,}3 = 1{,}58\ \text{A}$$

La resistenza totale del circuito dei filamenti è:

$$R = V/I = 6{,}3/1{,}58 = 3{,}98\ \Omega$$

Se il filamento di una valvola richiede una corrente doppia di quella dei filamenti di ognuna delle altre tre valvole esso richiede i 2/5 della corrente totale cioè:

$$I = 2 \cdot 1{,}58/5 = 0{,}632\ \text{A}$$

e la sua resistenza è:

$$R = 6{,}3/0{,}632 = 10\ \Omega$$

Problema 26. Un saldatore da 200 W è costruito per essere inserito sulla rete a 125 V. Per adoperarlo a 220 V quale valore deve avere la resistenza da collegare in serie ad esso e quale potenza questa deve dissipare?

Soluzione. Il saldatore richiede una corrente:

$$I = W/V = 200/125 = 1{,}6\ \text{A}$$

Questa corrente deve circolare nella resistenza in serie e dovrà produrre su di essa una caduta di tensione di:

$$220 - 125 = 95 \text{ V} \quad \text{pertanto} \quad R = 95/1{,}6 = 59{,}5 \ \Omega$$

e la potenza dissipata in essa:

$$P = 95 \cdot 1{,}6 = 152 \text{ W}$$

Problema 27. Si debbono alimentare direttamente dalla rete, a 125 V, i filamenti della lampada spia (per 6 V) e delle seguenti valvole, collegati in serie fra loro: 12K8, 12K7, 12Q7, 35L6, 35Z4. La corrente richiesta da ognuno è di 0,15 A: quale valore deve avere il resistore R_s da collegare in serie ad essi? Quale potenza deve dissipare?

Soluzione. La caduta di tensione totale prodotta sui filamenti in serie è data dalla somma delle singole tensioni di accensione, indicate sotto alle val-

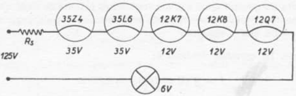


Fig. 69.

vole in fig. 69, cioè 112 V. Il resistore R_s deve produrre la caduta di tensione supplementare, cioè $125 - 112 = 13$ V. Anch'esso è attraversato dalla corrente di 0,15 A ed avrà una resistenza:

$$R_s = V/I = 13/0{,}15 = 86{,}6 \ \Omega$$

La potenza che dovrà dissipare è:

$$P = V\,I = 13 \cdot 0{,}15 = 1{,}95 \text{ W}$$

Problema 28. Si debba sostituire, in un ricevitore con i filamenti delle valvole alimentati in serie dalla rete, fig. 70, alla 12K8 la 6K8, il cui filamento richiede una corrente di 0,3 A sotto 6 V. Mantenendo tutti i filamenti collegati in serie quale valore dovrà avere il resistore R_p, da collegare in parallelo ai filamenti che richiedono 0,15 A? Quale valore dovrà avere R_s? Calcolare le potenze dissipate nelle due resistenze.

Soluzione. La caduta di tensione totale è di 106 V sui vari filamenti. Il resistore R_s deve produrre una caduta di tensione di 125 — 106 = 19 V con una corrente di 0,3 A:

$$R_s = V/I = 19/0{,}3 = 63{,}3\ \Omega$$

con una dissipazione di potenza di:

$$P = V\,I = 19 \cdot 0{,}3 = 5{,}7\ \mathrm{W}$$

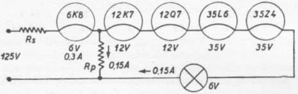


Fig. 70.

Il resistore R_p risulta in parallelo ai filamenti delle quattro valvole a destra e della lampadina, la cui caduta di tensione totale è di 100 V: in esso dovrà circolare una corrente di 0,15 A quindi:

$$R_p = 100/0{,}15 = 666\ \Omega$$

e dovrà dissipare una potenza:

$$P = V\,I = 100 \cdot 0{,}15 = 15\ \mathrm{W}$$

Problema 29. In un radioricevitore le valvole sono accese con i filamenti in serie, fig. 71. Sullo schema, sotto ogni valvola, è indicata la tensione da applicare al filamento; la corrente è per ognuna di 50 mA. Quale valore deve avere il resistore R_s se la tensione disponibile è di 90 V? Poichè i filamenti delle valvole verso il negativo sono attraversati anche dalla corrente catodica di quelle verso il positivo (i cui valori sono indicati sotto alla tensione dei filamenti), in parallelo ad ogni filamento, delle quattro valvole verso destra, è collegato un resistore, in cui circola questa corrente in eccesso. Calcolare i valori e le potenze dissipate nei quattro resistori.

Soluzione. La resistenza R_s deve produrre una caduta di tensione di:

$$90 - 8{,}4 = 81{,}6\ \mathrm{V}$$

$$R_s = 81{,}6/0{,}05 = 1633\ \Omega$$

e la potenza che deve dissipare:

$$P = 81{,}6 \cdot 0{,}05 = 4 \text{ W}$$

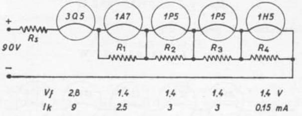


Fig. 71.

Nella resistenza R_1 deve circolare la corrente catodica della 3Q5, di 9 mA

$$R_1 = 1{,}4/0{,}009 = 155\ \Omega \quad \text{e} \quad P_1 = 1{,}4 \cdot 0{,}009 = 0{,}013 \text{ W}$$

Nella resistenza R_2 deve circolare la corrente catodica della 3Q5 e della 1A7, cioè 11,5 mA in totale:

$$R_2 = 1{,}4/0{,}0115 = 121\ \Omega \text{ e } P_2 = 0{,}016 \text{ W}$$
$$R_3 = 1{,}4/0{,}0145 = 97\ \Omega \quad \text{e} \quad P_3 = 0{,}020 \text{ W}$$
$$R_4 = 1{,}4/0{,}0175 = 80\ \Omega \quad \text{e} \quad P_4 = 0{,}024 \text{ W}$$

Le potenze ch'essi debbono dissipare sono inferiori a 0,1 W e si sceglieranno resistori del commercio di questo tipo.

Problema 30. L'alta tensione fornita dall'alimentatore di un radioricevitore è di 320 V. Le quattro valvole di questo richiedono un'alimentazione di 250 V 73 mA. Qual è la resistenza equivalente alle quattro valvole e quale la potenza in esse dissipata? Qual è il valore della resistenza, da collegare in serie al circuito di alimentazione, per ottenere la caduta di tensione necessaria e qual è la potenza in essa dissipata? Quante grandi calorie orarie produrrà questa resistenza montata sul telaio del ricevitore?

Soluzione. La resistenza equivalente alle quattro valvole:

$$R_v = 250/0{,}073 = 3425\ \Omega$$

La potenza da esse dissipata:

$$P_v = 250 \cdot 0{,}073 = 18{,}25 \text{ W}$$

La resistenza da porre in serie al circuito di alimentazione anodica:

$$R_s = 320 - 250/0{,}073 = 70/0{,}073 = 960\ \Omega$$

La potenza che dovrà dissipare:

$$P = 70 \cdot 0{,}073 = 5{,}1\ \mathrm{W}$$

e le grandi calorie prodotte:

$$\mathrm{W} = 0{,}00024 \cdot 5{,}1 \cdot 3600 = 4{,}4\ \mathrm{Cal}$$

Problema 31. Un alimentatore eroga a 260 V 45 mA ed a 250 V 50 mA. Un ricevitore richiede come alimentazione anodica 150 V 20 mA per tre valvole e 28 mA per una quarta. Quale sarà il valore della resistenza da inserire nel circuito per ridurre la tensione dell'alimentatore a 150 V e quale sarà la potenza dissipata in essa? Qual è la resistenza equivalente interna dell'alimentatore?

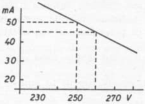


Fig. 72.

Soluzione. Per determinare la tensione esatta dell'alimentatore quando il carico richiede 48 mA (corrente anodica totale del ricevitore) si costruisce un grafico come in fig. 67: da esso si rileva che con un consumo di 48 mA la tensione è di 255 V.

La resistenza in serie da inserire è:

$$R_s = \frac{255 - 150}{0{,}048} = \frac{105}{0{,}048} = 2187\ \Omega$$

La potenza dissipata in essa è:

$$P = 105 \cdot 0{,}048 = 5\ \mathrm{W}$$

La resistenza equivalente alla resistenza interna dell'alimentatore nelle condizioni di lavoro considerate è:

$$R_i = \frac{260 - 250}{50 - 45} = \frac{10}{5} = 2 \text{ k}\Omega$$

Problema 32. Determinare le dimensioni da dare ad un resistore avvolto con filo di nichelcromo che possa essere piazzato in un ricevitore, in sostituzione dell'eccitazione dell'altoparlante, e che provochi una caduta di tensione di 80 V con 70 mA. La temperatura massima che il resistore può raggiungere è di 100 °C.

Soluzione. Il valore della resistenza è:

$$R = 80/0,70 = 1140 \ \Omega$$

e la potenza da essa dissipata:

$$P = 80 \cdot 0,07 = 5,6 \text{ W}$$

Ritenendo necessaria una superficie di 500 mm² per ogni watt dissipato, per ottenere una temperatura massima intorno a 100 °C per un resistore montato in un ricevitore, in posizione tale da essere sufficientemente ventilato, la superficie del cilindro di porcellana su cui effettuare l'avvolgimento deve essere:

$$S = 5,6 \cdot 500 = 2800 \text{ mm}^2$$

La superficie curva di un cilindro di 10 mm di diametro, lungo 10 cm è

$$S = 2 \pi r l = 6,28 \cdot 5 \cdot 100 = 3140 \text{ mm}^2$$

Lasciando, ai due estremi del cilindro, 5 mm di lunghezza senza l'avvolgimento del filo di resistenza, questo risulta avvolto sui restanti 90 mm cioè su una superficie di 2826 mm², sufficiente al raffreddamento. Ogni spira di filo risulta lunga $l = 31,4$ mm e se si effettua l'avvolgimento con filo ossidato di 0,15 mm, di cui entrano 600 spire nei 90 mm disponibili, con una lunghezza totale di m 18,8 si ottengono 1160 Ω poichè ogni metro ha una resistenza id 62 Ω.

Problema 33. Un serbatoio di 30 litri è riempito di acqua a 20 °C. In esso è immerso un resistore in cui circola una corrente di 2,2 A collegandolo alla rete a 220 V. Di quanto si eleva la temperatura dell'acqua dopo un'ora?

Soluzione. L'energia termica sviluppata dalla corrente nel resistore, in grandi calorie, è:

$$W = 0,00024 \, V I t = 0,00024 \cdot 220 \cdot 2,2 \cdot 3600 = 418 \text{ Cal}$$

Poichè ogni grande caloria eleva di un grado la temperatura di un litro di acqua, si ottiene un aumento di temperatura di $418/30 = 13{,}9$ °C e dopo un'ora i 30 litri di acqua raggiungono la temperatura di 33,9 °C.

Problema 34. Un radioricevitore richiede una potenza di 80 W ed è mantenuto in funzione per cinque ore al giorno. Qual è l'energia assorbita in un mese ed il suo costo totale se ogni chilowattora è fatturato L. 40?

Soluzione. Giornalmente il ricevitore richiede una potenza di 400 W ed in un mese tale potenza è di 12 000 W. Ad essa corrisponde una energia di 12 kWh ed il costo di essa risulta di $12 \cdot 40 = 480$ lire.

Problema 35. Quale dev'essere la capacità in amperora di una batteria di pile di 100 V e qual'è l'energia in wattora spesa per l'alimentazione anodica delle valvole di un ricevitore, che richiede una corrente di 20 mA, se la batteria deve assicurare un funzionamento costante di 100 ore?

Soluzione. La capacità della batteria deve essere:

$$C = I\,t = 0{,}02 \cdot 100 = 2 \text{ Ah}$$

L'energia spesa per l'alimentazione anodica è:

$$W = V\,I = 100 \cdot 2 = 200 \text{ Wh}$$

Problema 36. Qual è la capacità di un accumulatore che ha, come dato di targa, una corrente massima di carica di 10 A e risulta carico dopo 18 ore, cioè dopo tale tempo presenta una tensione di 2,75 V per elemento? Se esso fornisce corrente ad un carico per cui, dopo 115 ore, la tensione di ogni elemento si riduce a 1,92 V (minima tensione da raggiungere alla scarica) qual è il valore di questa corrente?

Soluzione. La capacità dell'accumulatore è:

$$C = I\,t = 10 \cdot 18 = 180 \text{ Ah}$$

Per calcolare la corrente di scarica si divide il valore della capacità in Ah per la durata della scarica:

$$I = C/t = 180/115 = 1{,}56 \text{ A}$$

Problema 37. Quattro pile, di 1,5 V e con resistenza interna di 0,5 Ω, possono essere collegate in serie o in parallelo fra loro. Con quale combinazione si ottiene la massima potenza dissipata in una resistenza di 4 Ω?

Soluzione. Collegando le quattro pile in serie fra loro si ottiene una tensione di 6 V ed una resistenza interna della batteria di 2 Ω. La corrente nel circuito è:

$$I = 6/(2 + 4) = 1 \text{ A}$$

la potenza dissipata nella resistenza è:

$$P = R I^2 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ W}$$

Collegando le pile a due a due in serie e queste serie in parallelo si ha una tensione di 3 V ed una resistenza interna di 0,5 Ω. Nel circuito la corrente è:

$$I = 3/(0{,}5 + 4) = 0{,}66 \text{ A}$$

e la potenza dissipata nella resistenza è:

$$P = 4 \cdot 0{,}66^2 = 1{,}75 \text{ W}$$

Collegando le quattro pile in parallelo risulta una tensione di 1,5 V ed una resistenza interna di 0,125 Ω. La corrente è:

$$I = 1{,}5/(0{,}125 + 4) = 0{,}36 \text{ A}$$

e la potenza dissipata nella resistenza:

$$P = 4 \cdot 0{,}36^2 = 0{,}52 \text{ W}$$

Problema 38. Una batteria di accumulatori di 6 elementi ha una f. e. m. per ogni elemento di 2 V ed una resistenza interna di 0,005 Ω. La f. e. m. aumenta durante la carica sino a 2,65 V e la resistenza interna resta invariata. Quale valore deve avere la f. e. m. della dinamo, adoperata per la sua carica, se questa ha una resistenza interna di 0,1 Ω e la corrente di carica va mantenuta a 10 A? Quale deve essere il valore massimo della resistenza da inserire nel circuito all'inizio della carica?

Soluzione. La f. e. m. massima raggiunta dalla batteria è:

$$V_b = 6 \cdot 2{,}65 = 15{,}9 \text{ V}$$

La f. e. m. della dinamo deve essere:

$$V_d = (R_i \cdot 10) + 15{,}9 = 16{,}9 \text{ V}$$

All'inizio della carica la tensione da applicare alla batteria è di 12 V ed il reostato da inserire nel circuito deve avere una resistenza massima di:

$$R_s = (16{,}9 - 12)/10 = 0{,}49 \ \Omega$$

che sarà man mano esclusa per mantenere la corrente di carica a 10 A.

Nei calcoli non si è tenuto conto della resistenza interna della batteria perchè di valore trascurabile.

Problema 39. Si deve alimentare una resistenza di 1 Ω con la corrente fornita da una batteria di 6 V: si dispone di un certo numero di elementi di pile la cui f. e. m. è di 1,5 V e la cui resistenza interna è di 0,5 Ω. In che modo ne va effettuato il collegamento per ottenere il massimo rendimento?

Soluzione. Il massimo rendimento si ottiene quando la resistenza interna del generatore R_i ha la stesso valore della resistenza di carico R_c. Il generatore, nel caso in esame, è costituito da quattro elementi di pila in serie, per ottenere 6 V; la sua resistenza interna è:

$$R_i = 4 \cdot 0{,}5 = 2\ \Omega$$

Occorre collegare in parallelo n batterie di 4 pile in serie per ridurre la resistenza interna al valore voluto:

$$R_i/n = R_c = 1\ \Omega$$

da cui:

$$R_i = n\, R_c = 2 \quad \text{ed} \quad n = 2/R_c = 2/1 = 2$$

Si deve effettuare il collegamento in parallelo di due batterie, ciascuna costituita da quattro pile in serie, per ottenere il massimo rendimento dal generatore così costituito.

Problema 40. Le batterie A e B hanno capacità adatte per essere inserite per un periodo di 10 ore su un resistore di 30 Ω, circuito di fig. 73 *a*, facendovi circolare una corrente sufficientemente costante. Desiderando avere nel medesimo resistore una corrente di maggiore intensità, per un tempo uguale, è possibile collegare in serie le due batterie?

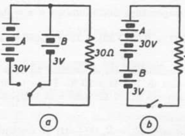


Fig. 73.

Soluzione. Inserendo la batteria di 30 V sul resistore di 30 Ω vi circola una corrente di intensità:

$$I = 30/30 = 1\ \text{A}.$$

Inserendo la batteria di 3 V sul resistore di 30 Ω vi circola una corrente di intensità:

$$I = 3/30 = 0{,}1 \text{ A}.$$

Collegando in serie le due batterie si ha una tensione totale di 33 V, figura 73 *b*, e nel resistore circola una corrente di intensità:

$$I = 33/30 = 1{,}1 \text{ A}.$$

Gli elementi della batteria di 30 V possono facilmente erogare una corrente un po' più intensa di quella normalmente richiesta, cioè 1,1 A invece di 1 A, ma gli elementi della batteria di 3 V possono avere una capacità troppo piccola per erogare una corrente di 1,1 A invece di 0,1 A e deteriorarsi in un tempo molto breve.

COEFFICIENTE DI TEMPERATURA

Problema 41. La bobina di eccitazione di un altoparlante è avvolta con filo di rame smaltato ed ha la resistenza di 1200 Ω a 18 °C. Durante il funzionamento la sua temperatura si eleva a 40 °C. Quale sarà il nuovo valore della resistenza della bobina? Se l'avvolgimento è effettuato con filo di alluminio ed ha la stessa resistenza a 18 °C quale valore raggiungerà questa, per la stessa variazione di temperatura?

Soluzione. Il coefficiente di temperatura del rame è $\alpha = 0{,}0039/°\text{C}$. La resistenza raggiunta dalla bobina con filo di rame per una variazione di temperatura di $40 - 18 = 22$ °C è:

$$R_t = R_o\,(1 + \alpha\, t) = 1200\,(1 + 0{,}0039 \cdot 22) = 1200 \cdot 1{,}086 = 1303\ \Omega$$

Il coefficiente di temperatura dell'alluminio è $\alpha = 0{,}004/°\text{C}$:

$$R_t = 1200\,(1 + 0{,}004 \cdot 22) = 1200 \cdot 1{,}088 = 1305\ \Omega$$

Problema 42. L'avvolgimento del secondario ad alta tensione di un trasformatore ha la resistenza di 140 Ω a 20 °C. Dopo un'ora di funzionamento la sua resistenza è aumentata a 162 Ω: qual è la temperatura raggiunta dall'avvolgimento?

Soluzione. Nella formula $R_t = R_o\,(1 + \alpha t)$ si sostituiscano i valori dati dal problema:

$$162 = 140\,(1 + t \cdot 0{,}039)$$

$$162/140 = 1 + t \cdot 0{,}0039 \qquad 1{,}15 = 1 + t \cdot 0{,}0039 \qquad 1{,}15 - 1 = t \cdot 0{,}0039$$

$$t = 0{,}15/0{,}0039 = 40\ °\text{C}$$

La variazione di temperatura è di 40 °C e la temperatura raggiunta dall'avvolgimento è di 20° + 40° = 60 °C.

Problema 43. Il filamento di tungsteno di una valvola trasmittente ha la resistenza di 0,283 Ω a 20 °C. Il coefficiente di temperatura del tungsteno è $\alpha = 0{,}0051$. Quale sarà la resistenza del filamento quando la sua temperatura raggiungerà 1350 °C?

Soluzione. Sostituendo i valori nella formula:

$$R_t = R_0 (1 + \alpha t) = 0{,}283 (1 + 0{,}0051 \cdot 1350) = 2{,}2 \ \Omega$$

Problema 44. Una valvola richiede per il filamento riscaldatore del catodo una corrente di 0,3 A a 6,3 V: la temperatura che questo filamento di tungsteno raggiunge durante il funzionamento è di 1100 °C. Quale intensità di corrente assorbirà questo filamento nel momento in cui è messa in funzione la valvola, se la sua temperatura è di 20 °C?

Soluzione. La resistenza del filamento a 1100 °C è:

$$6{,}3/0{,}3 = 21 \ \Omega$$

$$21 = R_0 (1 + \alpha t) = R_0 (1 + 0{,}0051 \cdot 1100) = R_0 \cdot 6{,}61$$

$$R_0 = 21/6{,}61 = 3{,}17 \ \Omega$$

Alla temperatura di 20 °C la resistenza del filamento è:

$$R = R_0 (1 + 0{,}0051 \cdot 20) = 3{,}17 \cdot 1{,}102 = 3{,}49 \ \Omega$$

e la corrente assorbita:

$$I = 6{,}3/3{,}49 = 1{,}8 \ \text{A}$$

STRUMENTI DI MISURA

Problema 45. Un voltmetro con portata di 100 V f. s. e resistenza interna di 6400 Ω è collegato ai morsetti di un generatore, con f. e. m. di 100 V e resistenza interna di 500 Ω. Quale sarà la tensione indicata dal voltmetro?

Soluzione. La f. e. m. del generatore si suddivide proporzionalmente fra la resistenza interna del generatore e quella dello strumento. Quest'ultima è rispetto alla resistenza totale del circuito nel rapporto:

$$\frac{6400}{6400 + 500} = \frac{64}{69} = 0{,}93$$

per cui la tensione indicata è:

$$0{,}93 \cdot 100 = 93 \text{ V}$$

Problema 46. Una batteria di accumulatori ha una f. e. m. di 100 V ed una resistenza interna trascurabile. Ad un suo morsetto va collegata una resistenza di 10 kΩ. Si effettui la misura della tensione, dopo questa resistenza, con un voltmetro con portata di 100 V f. s. e resistenza interna di 1000 Ω (10 Ω/V); si ripeta la misura con un voltmetro con portata di 100 V f. s. e resistenza interna di 100 kΩ (1000 Ω/V). Quali indicazioni forniranno i due strumenti?

Soluzione. Con il primo voltmetro inserito il circuito ha una resistenza totale $R_t = 10\,000 + 1000 = 11\,000$ Ω e la corrente che vi circola è $I = 100/$ $/11\,000 = 0{,}00909$ A per cui sulla resistenza di 10 kΩ risulta una caduta di tensione $V_R = 0{,}00909 \cdot 10^4 = 90{,}9$ V e sul voltmetro una $V_m = 0{,}00909 \cdot 10^3 =$ $= 9{,}09$ V tensione indicata dallo strumento.

Con il secondo voltmetro inserito $R_t = 10\,000 + 100\,000 = 110\,000$ e la corrente nel circuito è $I = 100/110\,000 = 0{,}000909$ A: la caduta di tensione sulla resistenza di 10 kΩ è $V_R = 10\,000 \cdot 0{,}000909 = 9{,}09$ V e quella sul voltmetro $V_m = 100\,000 \cdot 0{,}000909 = 90{,}9$ V, tensione indicata dallo strumento.

La resistenza interna dello strumento ha un'influenza tanto maggiore sull'errore della indicazione quanto più elevata è la resistenza interna del generatore o quella che risulta in serie ad esso.

Problema 47. Si collega fra i morsetti di una batteria di pile, la cui f. e. m. è di 120 V, una resistenza di 1000 Ω e con un voltmetro, con elevatissima resistenza interna, si misura una tensione di 100 V fra essi. Qual è la resistenza interna della batteria?

Soluzione. Nella resistenza circola una corrente:

$$I = 100/1000 = 0{,}1 \text{ A}$$

La stessa corrente circola nella batteria e provoca in essa una caduta di tensione di 20 V, pertanto la resistenza interna di questa è:

$$R_i = 20/0{,}1 = 200\ \Omega$$

Problema 48. Con un milliamperometro, la cui portata in f. s. è di 5 mA e la $R_i = 10$ Ω, si debbono misurare correnti fino a 100 mA. Quale sarà il valore della resistenza da porre in derivazione allo strumento?

Soluzione. Il valore del coefficiente di moltiplicazione dell'indicazione dello strumento è dato dal rapporto fra la nuova portata f. s. che si desidera e quella originale:

$$m = \frac{100}{5} = 20$$

Il valore della resistenza in derivazione è:

$$R_d = \frac{R_i}{m-1} = \frac{10}{20-1} = 0{,}526\ \Omega$$

Problema 49. Ad un milliamperometro, con portata di 10 mA f. s. e con resistenza interna di 5 Ω, si collega in derivazione una resistenza R_d di valore adatto a rendere la resistenza totale di 0,5 Ω. Inseritolo quindi in un circuito esso indica 1,25 mA. Quale valore deve avere la resistenza R_d da collegare in derivazione? Qual è il valore della corrente nel circuito? Qual è la caduta di tensione che lo strumento, con la derivazione, introduce nel circuito?

Soluzione.

$$\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_d} = \frac{1}{5} + \frac{1}{R_d} = \frac{1}{0{,}5} \qquad 2 = 0{,}2 + \frac{1}{R_d} \qquad \frac{1}{R_d} = 2 - 0{,}2 = 1{,}8\ \Omega$$

ed:

$$R_d = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}555\ \Omega$$

La nuova portata dello strumento P_2 risulta rispetto alla primitiva P_1:

$$P_2 = P_1 \frac{R_i + R_d}{R_d} = 10 \frac{5 + 0{,}555}{0{,}555} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ mA}$$

L'indicazione di 1,25 mA va moltiplicata per 10 e la corrente nel circuito è di 12,5 mA.

La caduta di tensione prodotta sullo strumento dalla corrente suddetta è:

$$V = R\,I = 0{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-3} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}\text{ V} = 6{,}25\text{ mV}$$

Problema 50. Con un milliamperometro, da 100 mA f. s. e $R_i = 2{,}7\ \Omega$, si debbono misurare correnti fino a 2 A. Quale deve essere il valore della resistenza da collegare in derivazione allo strumento? Per costruirla con filo di manganina ($\rho = 0{,}47$) e volendo far circolare in questo una corrente massima di 1 A/mm² quali saranno il diametro del filo e la sua lunghezza?

Soluzione. Il coefficiente di moltiplicazione della portata è $2/0{,}1 = 20$ e la resistenza in derivazione risulta:

$$R_d = \frac{R_i}{m-1} = \frac{2{,}7}{20-1} = 0{,}142\ \Omega$$

La sezione del filo di manganina deve essere di 1,9 mm², perchè la corrente massima che vi può passare è di $2 - 0{,}1 = 1{,}9$ A, cioè:

$$s = \pi r^2 = 1{,}9 \qquad r^2 = \frac{1{,}9}{3{,}14} = 0{,}6 \qquad r = 0{,}77 \qquad d = 1{,}54 \text{ mm}$$

La lunghezza del filo di manganina sarà ricavata dalla formula:

$$R = \rho \frac{l}{S} \qquad l = \frac{R \cdot S}{\rho} = \frac{0{,}142 \cdot 1{,}9}{0{,}47} = 0{,}575 \text{ m}$$

Problema 51. Determinare i valori delle resistenze di un derivatore universale per un milliamperometro da 0,5 mA f. s., con $R_i = 400\ \Omega$, per ottenere portate di 1, 10, 60, 600 mA f. s.

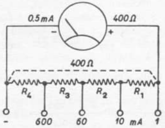


Fig. 74.

Soluzione. Si determina la resistenza totale del derivatore, che consente la portata di 1 mA:

$$R_d = \frac{0{,}5}{1 - 0{,}5}\, 400 = 400\ \Omega$$

La somma della resistenza interna dello strumento e della resistenza del derivatore è di 800 Ω.

Il coefficiente di moltiplicazione per la portata di 10 mA è di 20:

$$R_2 + R_3 + R_4 = 800/20 = 40\ \Omega$$

Il coefficiente di moltiplicazione per la portata di 60 mA è di 120:

$$R_3 + R_4 = 800/120 = 6{,}66\ \Omega$$

Il coefficiente di moltiplicazione per la portata di 600 mA è di 1200:

$$R_4 = 800/1200 = 0{,}66\ \Omega$$

Effettuando le differenze risultano:

$$R_3 = 6\ \Omega \qquad R_2 = 33{,}34\ \Omega \qquad R_1 = 360\ \Omega$$

Problema 52. Il derivatore universale, costruito con i valori delle resistenze calcolati nel problema precedente, è adoperato collegandolo ai morsetti di uno strumento con portata 1 mA e una resistenza interna di 50 Ω. Calcolare le differenze che risultano nelle portate dello strumento.

Soluzione. Le formule relative ai poteri moltiplicatori sono :

$$m_1 = \frac{R_i + R_d}{R_d} = \frac{R_i + R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{50 + 400}{400} = 1{,}125$$

$$m_2 = \frac{R_i + R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{450}{40} = 11{,}25$$

$$m_3 = \frac{R_i + R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_3 + R_4} = \frac{450}{6{,}66} = 67{,}5$$

$$m_4 = \frac{R_i + R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_4} = \frac{450}{0{,}66} = 675$$

Collegato il suddetto derivatore allo strumento, fra i due morsetti estremi si ha una portata di 1,125 mA; fra il morsetto comune e quello originale 10 la portata risulta di 11,25 mA, dieci volte la portata minima; fra il morsetto comune e quello originale 60 la portata risulta di 67,5 mA e fra quello comune e quello originale 600 la portata risulta di 675 mA, cioè 600 volte la minima.

Non si verifica quindi alcuna alterazione nei poteri moltiplicatori del derivatore, risultano solo valori delle portate che non sono comodamente adoperabili.

Problema 53. Un milliamperometro ha una portata massima f. s. di 5 mA ed una $R_i = 25\ \Omega$. Qual è la massima tensione che si può misurare con questo strumento? Quale resistenza R_s va aggiunta, in serie allo strumento, per ottenere come valore di f. s. 10 V?

Soluzione. La tensione V_1 che, applicata ai morsetti dello strumento, ne fa deviare l'indice fino in f. s. è:

$$V_1 = R_i I = 25 \cdot 0{,}005 = 0{,}125\ \text{V} = 125\ \text{mV}$$

Per aumentare la portata del millivoltmetro da $V_1 = 0{,}125$ V a $V_2 = 10$ V occorre una resistenza in serie il cui valore è:

$$R_s = R_i \frac{V_2 - V_1}{V_1} = 25 \frac{10 - 0{,}125}{0{,}125} = 25 \cdot 79 = 1975\ \Omega$$

Problema 54. Un voltmetro ha una resistenza interna di 64 Ω/V. La portata di f. s. dello strumento è di 100 V: quale corrente circola in esso in corrispondenza di questa portata?

Soluzione. La resistenza interna dello strumento è di:

$$R_i = 64 \cdot 100 = 6400\ \Omega$$

La corrente massima assorbita è:

$$I = V/R_i = 100/6400 = 0{,}0156\ \text{A} = 15{,}6\ \text{mA}$$

Problema 55. Con un microamperometro da 100 μA f. s. ed $R_i = 700\ \Omega$ si vuole costruire un voltmetro con le portate di 1-5-10 V f. s. Quali sono i valori delle resistenze da collegare in serie allo strumento? Quale valore avrà la sua resistenza per volt?

Soluzione. La resistenza totale che lo strumento deve presentare per la portata di 1 V, in modo che in esso circolino 0,0001 A è:

$$R = V/I = 1/0{,}0001 = 10\,000\ \Omega$$

da cui va sottratto il valore della resistenza interna per ottenere quello della resistenza in serie:

$$R_s = 10\,000 - 700 = 9300\ \Omega$$

Per la portata di 5 V f. s. la resistenza totale deve risultare:

$$R = 5/0{,}0001 = 50\,000\ \Omega \text{ e la } R_s = 50\,000 - 700 = 49\,300\ \Omega$$

Per la portata di 10 V f. s. la resistenza totale deve risultare:

$$R = 10/0{,}0001 = 100\,000\ \Omega \text{ e la } R_s = 100\,000 - 700 = 99\,300\ \Omega$$

Dalla resistenza totale del voltmetro per la portata di 1 V f. s. risulta che la resistenza per volt è di 10 000 Ω/V.

Problema 56. Adoperando un voltmetro, con portata di 100 V f. s. e 1000 Ω/V, per la misura della tensione di un generatore, con f. e. m. di 100 V e $R_i = 500\ \Omega$, quale sarà l'indicazione dello strumento e quale la corrente da esso assorbita?

Soluzione. La resistenza totale del voltmetro è di 100 000 Ω. Collegandolo fra i due morsetti del generatore si ha un circuito con resistenza totale di 100 500 Ω. La corrente nel circuito risulta:

$$I = V/R = 100/100\,500 = 0{,}00099 \text{ A} = 0{,}99 \text{ mA}$$

L'indicazione dello strumento è uguale alla caduta di tensione fra i suoi morsetti:

$$V = R\,I = 100\,000 \cdot 0{,}00099 = 99 \text{ V}$$

Problema 57. Il terzo anodo del cinescopio di un televisore richiede una corrente di 100 μA a 13 500 V. Per misurare l'extra alta tensione si fa uso di un voltmetro elettronico con un partitore di tensione all'ingresso, in modo che solo una minima frazione di essa risulti fra i suoi morsetti. Per ottenere una sufficiente precisione il nuovo carico imposto sull'alimentatore dell'EAT deve risultare di un decimo di quello del cinescopio. Quale valore minimo deve avere la resistenza del partitore?

Soluzione. Il cinescopio rappresenta per l'alimentatore EAT un carico:

$$R = \frac{13\,500}{0{,}0001} = \frac{1{,}35 \cdot 10^4}{10^{-4}} = 1{,}35 \cdot 10^8 \ \Omega = 135 \text{ M}\Omega$$

Per ottenere l'approssimazione sufficiente della misura il partitore dovrà avere una resistenza minima di 1350 MΩ.

Problema 58. In un ohmmetro in serie le resistenze R e P, fig. 75, consentono di ottenere sempre l'azzeramento dello strumento malgrado le variazioni della tensione della batteria B, da 1,5 a 1,2 V. Se lo strumento ha una portata di 1 mA f. s. ed una resistenza interna trascurabile quali valori debbono avere R e P?

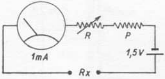


Fig. 75.

Soluzione. La resistenza totale di R e P deve essere:

$$R_t = V/I = 1{,}5/0{,}001 = 1500 \ \Omega$$

Quando la pila è scarica la sua tensione si riduce a 1,2 V ed R è completamente esclusa per cui solo P deve avere un valore:

$$P = 1{,}2/0{,}001 = 1200\ \Omega$$

Il valore di R sarà:

$$R = R_t - P = 1500 - 1200 = 300\ \Omega$$

CIRCUITO ELETTRICO

Problema 59. Del complesso di resistenze di fig. 76 si trovi il valore della resistenza risultante. Se, a mezzo di una batteria, si applica una tensione di 6 V fra i morsetti qual è il valore della corrente che circola in R_6?

Soluzione. Dal parallelo di R_1 ed R_2 risulta:

$$\frac{325 \cdot 470}{325 + 470} = 192{,}5\ \Omega$$

Dal parallelo di R_4 ed R_5 risulta:

$$\frac{37 \cdot 49}{37 + 49} = 21\ \Omega$$

Dalla serie $R_3\,(R_4 - R_5)$:

$$1200 + 21 = 1221\ \Omega$$

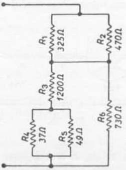


Fig. 76.

Dal parallelo $[R_3 (R_4 - R_5)] - R_6$ risulta:

$$\frac{1221 \cdot 730}{1221 + 730} = 456\ \Omega$$

La serie $(R_1 - R_2) + [R_3 (R_4 - R_5) - R_6] = 192{,}5 + 456 = 648{,}5\ \Omega$, valore della resistenza risultante. La tensione di 6 V si ripartisce fra il parallelo $(R_1 - R_2) = 192{,}5\ \Omega$ e la combinazione delle altre resistenze il cui valore è di 456 Ω, quindi ad R_6 è applicata la tensione:

$$V = 6 \frac{456}{456 + 192{,}5} = 6 \cdot 0{,}7 = 4{,}2\ \text{V}$$

e la corrente che vi circola è:

$$I = V/R = 4{,}2/730 = 0{,}0057\ \text{A}$$

Problema 60. Dato il circuito di fig. 77, alimentato con una tensione di 80 V ed una corrente di 36 mA, determinare i valori di R_1 ed R_2, che consentano di alimentare con 30 mA la resistenza di 1000 Ω.

Soluzione. Affinchè nella resistenza di 1000 Ω circolino 30 mA occorre applicare ai suoi estremi una tensione:

$$V = R\,I = 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 30\ \text{V}$$

Sotto questa tensione in R_1 debbono circolare 6 mA, quindi:

$$R_1 = V/I = 30/(6 \cdot 10^{-3}) = 5 \cdot 10^3\ \Omega$$

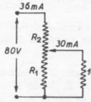


Fig. 77.

Sulla resistenza R_2 si deve verificare una caduta di tensione di:

$$80 - 30 = 50\ \text{V}$$

con una corrente di 36 mA, quindi:

$$R_2 = V/I = 50/(36 \cdot 10^{-3}) = 1{,}39 \cdot 10^3\ \Omega$$

Problema 61. Nel circuito a ponte di fig. 78 fra i morsetti A e B viene inserito un voltmetro, con resistenza interna elevatissima: quale tensione indicherà?

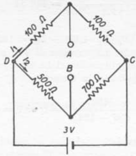


Fig. 78.

Soluzione. Ai due terminali C e D fanno capo i due circuiti costituiti dalle resistenze 100 + 100 e 700 + 500. Nel primo di essi scorre la corrente:

$$I_1 = 3/200 = 0{,}015 \text{ A}$$

nel secondo:

$$I_2 = 3/1200 = 0{,}0025 \text{ A}$$

Sulla resistenza di 100 Ω si ha una caduta di tensione:

$$V_1 = 100 \cdot 0{,}015 = 15 \text{ V}$$

su quella di 700 Ω:

$$V_2 = 700 \cdot 0{,}0025 = 1{,}75 \text{ V}$$

La tensione fra A e B è di 1,75 − 1,5 = 0,25 V ed A è negativo rispetto B. Lo strumento indicherà questo valore di tensione.

Problema 62. Nel circuito del ponte di Wheatstone di fig. 79 a due lati del ponte sono stati assegnati i valori $R_1 = 100$ Ω ed $R_2 = 1000$ Ω. Inserendo fra i due morsetti R_x un resistore di 700 Ω quale valore si dovrà dare al resistore variabile R_v affinchè il voltmetro inserito fra A e B indichi una tensione zero?

Soluzione. Perchè il voltmetro indichi una tensione zero occorre che fra i morsetti A e B risultino due tensioni uguali rispetto ad ogni morsetto della batteria, che siano cioè uguali le cadute di tensione prodotte dalle correnti I_1 ed I_2 nei due rami del ponte:

$$I_1 R_1 = I_2 R_v \qquad I_1 R_2 = I_2 R_x$$

Dividendo le due uguaglianze membro a membro una per l'altra si stabilisce la proporzione:

$$I_1 R_1 : I_1 R_2 = I_2 R_v : I_2 R_x$$

da cui:

$$I_2 R_v = \frac{(I_1 R_1)(I_2 R_x)}{I_1 R_2} = \frac{I_2 R_1 R_x}{R_2} \qquad R_v = \frac{R_1 R_x}{R_2}$$

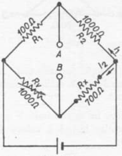


Fig. 79.

Sostituendo i valori dati nell'enunciato del problema:

$$R_v = \frac{100 \cdot 700}{1000} = 70\ \Omega$$

Problema 63. Collegare cinque resistori, ciascuno con resistenza di 100 ohm, in modo da ottenere un valore della resistenza totale di 100 Ω.

Soluzione. Quattro resistori vanno collegati in modo da costituire i quattro bracci di un circuito a ponte: la resistenza fra due punti opposti di una diagonale di questo circuito risulta dal parallelo di due serie di resistori (100 + 100), quindi di 100 ohm.

Il ponte avendo i quattro bracci uguali risulta bilanciato quindi fra i punti opposti dell'altra diagonale non vi è alcuna d.d.p. ed il quinto resistore di 100 ohm può essere inserito secondo questa diagonale, senza alterare il valore della resistenza totale.

Problema 64. Qual'è il valore della resistenza fra i due morsetti A e B del circuito di fig. 80 quando i due morsetti C e D sono liberi e quando sono cortocircuitati fra loro?

Soluzione. Il circuito in figura è un circuito a ponte con valori delle resistenze tali da farlo risultare equilibrato.

Il valore della resistenza fra A e B è dato dal collegamento in parallelo di due resistenze di $10 + 20 = 30$ ohm ciascuna, cioè di 15 ohm.

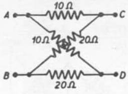


Fig. 80.

Lasciando liberi o collegando in cortocircuito i morsetti C e D, dato l'equilibrio del ponte, non si altera il valore della resistenza fra A e B.

Problema 65. Quale valore ha la tensione V applicata ai morsetti XY del circuito di fig. 81 se il voltmetro indica il valore di 50 V, collegandolo sia fra i punti A e C che fra B e D?

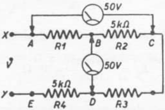


Fig. 81.

Soluzione. Osservando il circuito si nota che il resistore R_2 ha un valore uguale ad R_4, quindi se il voltmetro indica 50 V fra i punti B e D, fra cui sono i resistori R_2 ed R_3, dovrà indicare la medesima tensione se lo si inserisce fra C ed E, poichè fra questi punti è inserito sempre il resistore R_3 ed R_4 ha il medesimo valore di R_2.

La tensione V applicata fra i morsetti XY del circuito è di 100 V perchè fra le coppie di punti A e C e quella C ed E esistono 50 V.

Problema 66. Un alimentatore ha una tensione massima di 250 V. Ad un radioricevitore occorrono, oltre alla tensione anodica suddetta, una di 90 V ed una di 45 V. Fra i morsetti dell'alimentatore si collega un resistore, fig. 82, su cui si effettuano due prese per ottenere le tensioni volute. Quali valori debbono essere adottati per le tre sezioni del resistore R_1, R_2 ed R_3 se a 90 V è richiesta una corrente di intensità di 10 mA ed a 45 V una di 5 mA? Inoltre, per ottenere tensioni più costanti sulle prese del resistore, si ammette in esso una corrente a vuoto di 15 mA.

Soluzione. Le tre sezioni del resistore costituiscono un partitore di tensione. Nella R_1 circolano oltre alla corrente di 15 mA, che si è stabilito vada perduta nel partitore, quelle di 10 e di 5 mA richieste alle due prese intermedie, cioè una corrente totale di 30 mA, quindi il suo valore deve essere:

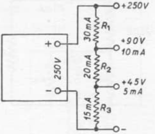


Fig. 82.

$$R_1 = 250 - 90/0{,}03 = 160/0{,}03 = 5333\ \Omega$$

In essa vanno dissipati:

$$P_1 = 160 \cdot 0{,}03 = 4{,}8\ \mathrm{W}$$

Nella sezione R_2 circolano $15 + 5 = 20$ mA:

$$R_2 = 90 - 45/0{,}02 = 45/0{,}02 = 2250\ \Omega$$

con una dissipazione:

$$P_2 = 45 \cdot 0{,}02 = 0{,}9\ \mathrm{W}$$

Nella sezione R_3 circola solo la corrente di stabilizzazione di 15 mA:

$$R_3 = 45/0{,}015 = 3000\ \Omega$$

con una dissipazione:

$$P_3 = 45 \cdot 0{,}015 = 0{,}68\ \mathrm{W}$$

Per l'uso pratico si presta un partitore di 11 000 Ω con quattro prese, di dimensioni adatte a dissipare circa 10 W.

Problema 67. Quale valore deve avere la resistenza R_3, nel circuito di figura 83, se in essa deve circolare una corrente di 10 mA? Quale valore deve avere la resistenza R_2?

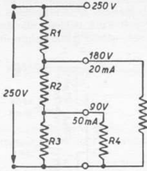


Fig. 83.

Soluzione. Le resistenze R_1, R_2 ed R_3 costituiscono un partitore di tensione che consente di ottenere le tensioni di 180 e 90 V con le correnti stabilite. Poichè alla resistenza R_3 è applicata la tensione di 90 V essa dovrà avere il valore:

$$R_3 = V/I = 90/0{,}01 = 9000\ \Omega$$

Nella resistenza R_2 debbono circolare le correnti di 10 mA, che attraversano la R_3, e di 50 mA, richiesta dalla resistenza di carico R_4, cioè con una corrente totale:

$$I = 50 + 10 = 60 \text{ mA}$$

si deve verificare una caduta di tensione:

$$V = 180 - 90 = 90 \text{ V}$$

quindi:

$$R_2 = 90/0{,}06 = 1500\ \Omega$$

Problema 68. Quale tensione risulta applicata alla resistenza R_5 e quale al partitore $R_3 R_4$ del circuito di fig. 84?

Soluzione. Dal collegamento in parallelo di R_4 ed R_5:

$$R_{4\cdot5} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \frac{2{,}1 \cdot 10^4 \cdot 3{,}5 \cdot 10^4}{2{,}1 \cdot 10^4 + 3{,}5 \cdot 10^4} = \frac{7{,}35 \cdot 10^8}{5{,}6 \cdot 10^4} = 1{,}31 \cdot 10^4\ \Omega$$

Dalla serie di R_3 ed $R_{4\cdot5}$:

$$R_{3\cdot4\cdot5} = 3{,}7 \cdot 10^4 + 1{,}31 \cdot 10^4 = 5{,}01 \cdot 10^4\ \Omega$$

Il parallelo di R_2 ed $R_{3.4.5}$:

$$R_{2.3.4.5} = \frac{1{,}7 \cdot 10^4 \cdot 5{,}01 \cdot 10^4}{1{,}7 \cdot 10^4 + 5{,}01 \cdot 10^4} = \frac{8{,}52 \cdot 10^8}{6{,}71 \cdot 10^4} = 1{,}26 \cdot 10^4 \ \Omega$$

La resistenza risultante in parallelo al generatore è:

$$R_1 + R_{2.3.4.5} = 1{,}3 \cdot 10^4 + 1{,}26 \cdot 10^4 = 2{,}56 \cdot 10^4 \ \Omega$$

e la corrente ad essa fornita è:

$$I_1 = 100/(2{,}56 \cdot 10^4) = 39 \cdot 10^{-4} = 3{,}9 \text{ mA}$$

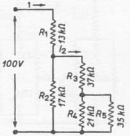


Fig. 84.

La tensione risultante sul secondo partitore ($R_3\,R_4$):

$$V = I_1\,R_{2.3.4.5} = 3{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}26 \cdot 10^4 = 48{,}1 \text{ V}$$

La corrente richiesta dal secondo partitore, con R_5 collegato:

$$I_2 = 48{,}1/(5{,}01 \cdot 10^4) = 9{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ A} = 0{,}96 \text{ mA}$$

La tensione presente su R_5:

$$V = R_{4.5}\,I_2 = 1{,}31 \cdot 10^4 \cdot 9{,}6 \cdot 10^{-4} = 12{,}47 \text{ V}$$

Problema 69. Qual è la corrente fornita dal generatore al circuito di fig. 85 e qual è la tensione esistente fra i punti D ed E?

Soluzione. La resistenza del ramo BF ha il valore:

$$R_1 = \frac{8 \cdot 3}{8 + 3} = \frac{24}{11} = 2{,}18 \text{ k}\Omega$$

La resistenza del ramo ABF ha il valore:

$$R_2 = 3 + 2{,}18 = 5{,}18 \text{ k}\Omega$$

Il ramo CG ha un valore della resistenza:

$$R_3 = \frac{3{,}5 \cdot 18}{3{,}5 + 18} = \frac{63}{21{,}5} = 2{,}93 \text{ k}\Omega$$

Il ramo ACG ha un valore della resistenza totale:

$$R_4 = 5 + 2{,}93 = 7{,}93 \text{ k}\Omega$$

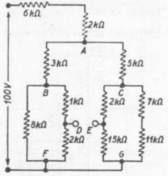


Fig. 85.

Dal parallelo di R_2 ed R_4 risulta:

$$R_5 = \frac{5{,}18 \cdot 7{,}93}{5{,}18 + 7{,}93} = \frac{41{,}07}{13{,}11} = 3{,}13 \text{ k}\Omega$$

Fra i due morsetti d'ingresso si ha una resistenza totale:

$$R_t = 6 + 2 + 3{,}13 = 11{,}13 \text{ k}\Omega$$

e la corrente erogata dal generatore al circuito è:

$$I = 100/11{,}13 = 9 \text{ mA}$$

Fra il punto A ed il morsetto negativo esiste una tensione:

$$V_5 = 3{,}13 \cdot 9 = 28{,}17 \text{ V}$$

Nel ramo ABF scorre la corrente:

$$I_B = 28{,}17/5{,}18 = 5{,}4 \text{ mA}$$

e fra i punti B ed F si ha una tensione:

$$V_B = 2{,}18 \cdot 5{,}4 = 11{,}77 \text{ V}$$

Nel ramo BDF scorre la corrente:

$$I_D = 11{,}77/3 = 3{,}9 \text{ mA}$$

per cui il punto D risulta alla tensione di:

$$V_D = 2 \cdot 3{,}9 = 7{,}8 \text{ V}$$

Nel ramo ACG scorre la corrente:

$$I_C = 28{,}17/7{,}93 = 3{,}55 \text{ mA}$$

e fra i punti C e G si ha una tensione:

$$V_C = 2{,}93 \cdot 3{,}55 = 10{,}4 \text{ V}$$

Nel ramo CEG scorre la corrente:

$$I_E = 10{,}4/3{,}5 = 2{,}97 \text{ mA}$$

per cui il punto E risulta alla tensione:

$$V_E = 1{,}5 \cdot 2{,}97 = 4{,}45 \text{ V}$$

Fra i punti D ed E esiste una tensione di 3,35 V con il punto D positivo rispetto ad E.

Problema 70. Ad un partitore di tensione, costituito da resistori R_1 ed R_2 di valore incognito, è applicata una tensione incognita V_x. Un voltmetro, con resistenza interna elevatissima, è collegato fra gli estremi di R_2 ed indica una

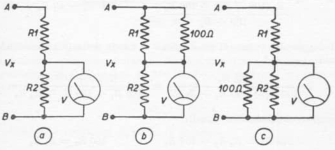


Fig. 86.

tensione di 12 V, fig. 86 *a*. Inserendo un resistore di 100 Ω in parallelo ad R_1 l'indicazione del voltmetro risulta di 20 V, fig. 86 *b*; inserendolo in parallelo ad R_2 l'indicazione risulta di 10 V, fig. 86 *c*. Quali sono i valori di R_1 ed R_2 e della tensione V_x?

Soluzione. Per i tre circuiti di fig. 86 si possono rispettivamente stabilire le seguenti uguaglianze:

$$12 \text{ V} = V_x \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{a}$$

$$20 \text{ V} = V_x \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{100 R_1}{R_1 + 100}} \tag{b}$$

$$10 \text{ V} = V_x \frac{\dfrac{100 R_2}{100 + R_2}}{R_1 + \dfrac{100 R_2}{100 + R_2}} \tag{c}$$

Sviluppando la (*b*):

$$20 = V_x \frac{R_2}{\dfrac{R_2 (R_1 + 100) + 100 R_1}{R_1 + 100}} = V_x \frac{R_2 (R_1 + 100)}{R_2 (R_1 + 100) + 100 R_1} =$$

$$= V_x \frac{R_1 R_2 + 100 R_2}{R_1 R_2 + 100 R_2 + 100 R_1}$$

Sviluppando la (*c*):

$$10 = V_x \frac{\dfrac{100 R_2}{100 + R_2}}{\dfrac{R_1 (100 + R_2) + 100 R_2}{100 + R_2}} = V_x \frac{100 R_2}{100 R_1 + R_1 R_2 + 100 R_2}$$

Il doppio del valore di (*c*) è uguale a quello della (*b*); eliminando V_x in comune:

$$2 \frac{100 R_2}{100 R_1 + 100 R_2 + R_1 R_2} = \frac{R_1 R_2 + 100 R_2}{100 R_1 + 100 R_2 + R_1 R_2}$$

eliminando i denominatori uguali:

$$200 R_2 = R_1 R_2 + 100 R_2 \qquad\qquad 100 R_2 = R_1 R_2$$

Il valore di $R_1 = \dfrac{100 R_2}{R_2} = 100\ \Omega$ va sostituito nella (*a*):

$$12 = V_x \frac{R_2}{100 + R_2} \qquad\qquad V_x R_2 = 1200 + 12 R_2$$

Sostituendo il valore di R_1 nella (b):

$$20 = V_x \frac{R_2}{50 + R_2} \qquad V_x R_2 = 1000 + 20\,R_2$$

Risulta quindi:

$$1200 + 12\,R_2 = 1000 + 20\,R_2 \qquad 20\,R_2 - 12\,R_2 = 1200 - 1000$$

$$R_2 = 200/8 = 25\ \Omega$$

Sostituendo nella (a) i valori di R_1 ed R_2:

$$12 = V_x \frac{25}{125} \qquad V_x = \frac{12 \cdot 125}{25} = \frac{1500}{25} = 60\ \text{V}$$

Problema 71. Con i dati indicati sul circuito di fig. 87 determinare i valori di R_1 ed R_5, della tensione V_x e della corrente totale richiesta (ritenendo nulle le resistenze degli amperometri).

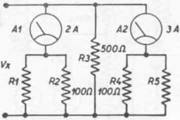


Fig. 87.

Soluzione. Essendo incognito il valore della tensione V_x applicata al circuito il problema ammette numerose soluzioni di cui una è la seguente. Si dia arbitrariamente ad R_1 il valore di 100 Ω: data la corrente che circola nello strumento A_1 e nelle due resistenze di 100 Ω in parallelo:

$$V_x = 50 \cdot 2 = 100\ \text{V}$$

Il valore delle resistenze R_4 ed R_5 in parallelo è:

$$R = V/I = 100/3 = 33{,}3\ \Omega$$

cioè:

$$\frac{R_4\,R_5}{R_4 + R_5} = \frac{100\,R_5}{100 + R_5} = 33{,}3$$

$$33{,}3\,(100 + R_5) = 100\,R_5 \qquad 3330 + 33{,}3\,R_5 = 100\,R_5$$

$$100\,R_5 - 33{,}3\,R_5 = 3330 \qquad 66{,}7\,R_5 = 3330 \qquad R_5 = \frac{3330}{66{,}7} = 49{,}9\;\Omega$$

La resistenza totale del circuito è data dal parallelo di 50 (R_1 ed R_2), 500 e 33,3 (R_4 ed R_5) ohm.

La corrente totale richiesta dal circuito è la somma di 2 e 3 A, indicate dagli strumenti, e da quella richiesta da R_3, cioè:

$$I = V/R = 100/500 = 0{,}2\ \text{A}$$

quindi è di 5,2 A.

Problema 72. Gli amperometri A_1 ed A_2 forniscono indicazioni uguali, la cui somma corrisponde a quella di A_3: calcolare i valori di R_4 ed R_5. Determinare la tensione della batteria.

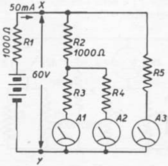


Fig. 88.

Soluzione. La resistenza del circuito inserito fra i due punti X ed Y ha il valore:

$$R = 60/0{,}05 = 1200\;\Omega$$

Poichè le correnti che circolano nei due rami in parallelo R_2-R_3-R_4 ed R_5 sono uguali, uguali saranno i valori delle loro resistenze, che dovranno avere un valore doppio di 1200 ohm:

$$R_5 = 2400\;\Omega$$

Poichè $R_2 = 1000\;\Omega$ il parallelo di R_3 ed R_4 risulterà di 1400 ohm e poichè le indicazioni di A_1 ed A_2 sono identiche:

$$R_3 = 2800\;\Omega \qquad R_4 = 2800\;\Omega$$

La caduta di tensione su R_1 è:

$$V = R\,I = 1000 \cdot 0{,}05 = 50 \text{ V}$$

La batteria ha una tensione di $60 + 50 = 110$ V.

Problema 73. Qual'è il valore della resistenza fra i punti a ed h di un circuito a forma di cubo, fig. 89, ogni spigolo del quale è costituito da un resistore di 1 Ω?

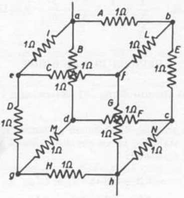


Fig. 89.

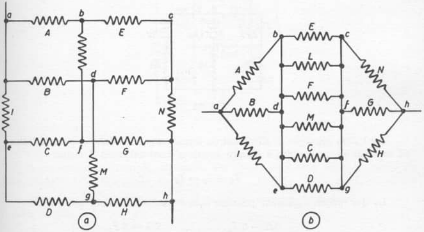


Fig. 90.

Soluzione. Il circuito del cubo di fig. 89 può essere ridisegnato come in fig. 90 *a*, in cui i punti *b*, *d*, *e* risultano al medesimo potenziale rispetto *h* e possono essere individuati su di un circuito come quello di fig. 90 *b*. Allo stesso modo i punti *c*, *f*, *g* sono equipotenziali e possono essere indicati come collegati fra loro.

Il valore della resistenza totale è quindi dato dal valore del collegamento in parallelo di tre resistori uguali più quello del parallelo di sei resistori uguali più quello del parallelo di tre resistori:

$$R_{tot} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0{,}83\ \Omega$$

PRINCIPI DI KIRCHHOFF

Problema 74. Nel circuito di fig. 91 determinare i valori delle correnti nei vari rami.

Soluzione. Per un principio di Kirchhoff (la somma algebrica delle tensioni, misurate in un verso stabilito, in un circuito chiuso è uguale a zero) si può stabilire il sistema di equazioni:

$$2{,}2 + 3{,}0 = 7\,I_1 + 5\,I_3$$
$$3{,}0 + 4{,}4 = 3\,I_2 + 5\,I_3$$

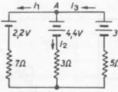


Fig. 91.

Per l'altro principio di Kirchhoff (la somma algebrica delle correnti relative ad un nodo di un circuito è sempre uguale a zero) nel nodo *A* si ha:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Le due prime equazioni possono essere risolte ritenendo nota I_3:

$$I_1 = \frac{5{,}2 - 5\,I_3}{7} \qquad I_2 = \frac{7{,}4 - 5\,I_3}{3}$$

che sostituiti nella terza equazione:

$$\frac{5{,}2 - 5\,I_3}{7} + \frac{7{,}4 - 5\,I_3}{3} = I_3$$

$$I_3 = \frac{15{,}6 - 15\,I_3 + 51{,}8 - 35\,I_3}{21}$$

$$21\,I_3 = 67{,}4 - 50\,I_3 \qquad 71\,I_3 = 67{,}4$$

$$I_3 = \frac{67{,}4}{71} = 0{,}949\ \mathrm{A}$$

valore che va sostituito nelle uguaglianze ottenute dalle due prime equazioni:

$$I_1 = \frac{5{,}2 - 4{,}05}{7} = \frac{1{,}15}{7} = 0{,}164\ \mathrm{A}$$

$$I_2 = \frac{7{,}4 - 4{,}05}{3} = \frac{3{,}35}{3} = 1{,}11\ \mathrm{A}$$

Problema 75. Determinare il valore della corrente attraverso ogni resistenza del circuito di fig. 92, la relativa caduta di tensione e la resistenza totale del circuito.

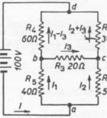


Fig. 92.

Soluzione. I_1 è la corrente che attraversa R_5; I_2 la corrente attraverso R_2; I_3 la corrente attraverso R_3, ritenendo che scorra da *b* in *c*. Nella R_4 circolerà la corrente $I_1 - I_3$ e nella R_1 la $I_2 + I_3$.

Per le tre correnti incognite si hanno le seguenti equazioni: nella maglia *abd*:

$$40\,I_1 + 60\,(I_1 - I_3) = 100\,I_1 - 60\,I_3 = 100\ \mathrm{V} \tag{1}$$

nella maglia *abcd*:

$$40\,I_1 + 20\,I_3 + 30\,(I_2 + I_3) = 40\,I_1 + 30\,I_2 + 50\,I_3 = 100 \text{ V} \qquad (2)$$

nella maglia *acd*:

$$50\,I_2 + 30\,(I_2 + I_3) = 80\,I_2 + 30\,I_3 = 100 \text{ V} \qquad (3)$$

Per sottrarre dalla (1) la (2) ed eliminare I_1 si moltiplica la (1) per 2 e la (2) per 5:

$$200\,I_1 - 120\,I_3 = 200 \qquad (4)$$

$$200\,I_1 + 150\,I_2 + 250\,I_3 = 500 \qquad (5)$$

Sottraendo dalla (4) la (5):

$$-\,150\,I_2 - 370\,I_3 = -\,300 \qquad (6)$$

Per eliminare I_2 dalla (6) la si moltiplica per 8, quindi si moltiplica la (3) per 15:

$$-\,1200\,I_2 - 2960\,I_3 = -\,2400 \qquad (7)$$

$$1200\,I_2 + 450\,I_3 = 1500 \qquad (8)$$

addizionando alla (7) la (8):

$$-\,2510\,I_3 = -\,900 \quad \text{da cui} \quad I_3 = 0{,}359 \text{ A}$$

Sostituendo questo valore di I_3 nella (1):

$$100\,I_1 - 60 \cdot 0{,}359 = 100\,I_1 - 21{,}5 = 100 \text{ V}$$

$$100\,I_1 = 121{,}5 \quad \text{da cui} \quad I_1 = 1{,}215 \text{ A}$$

Sostituendo il valore di I_3 nella (3):

$$80\,I_2 + 30 \cdot 0{,}359 = 80\,I_2 + 10{,}77 = 100 \text{ V}$$

$$80\,I_2 = 89{,}23 \quad \text{da cui} \quad I_2 = 1{,}115 \text{ A}$$

Le altre due correnti:

$$I_1 - I_3 = 1{,}215 - 0{,}359 = 0{,}856 \text{ A}$$

$$I_2 + I_3 = 1{,}115 + 0{,}359 = 1{,}474 \text{ A}$$

La caduta di tensione sulle varie resistenze è:

$$V_1 = 30 \cdot 1{,}474 = 44{,}22 \text{ V}$$

$$V_2 = 50 \cdot 1{,}115 = 55{,}75 \text{ V}$$
$$V_3 = 20 \cdot 0{,}359 = 7{,}18 \text{ V}$$
$$V_4 = 60 \cdot 0{,}856 = 51{,}36 \text{ V}$$
$$V_5 = 40 \cdot 1{,}215 = 48{,}6 \text{ V}$$

La corrente totale fornita dalla batteria al circuito è di:

$$I_1 + I_2 = 1{,}215 + 1{,}115 = 2{,}33 \text{ A}$$

e la resistenza totale risulta:

$$R = 100/2{,}33 = 42{,}9 \ \Omega$$

Problema 76. Nel circuito a ponte di fig. 93 determinare la differenza di potenziale fra i punti A e B, avendo applicato fra i morsetti C e D una tensione di 10 V.

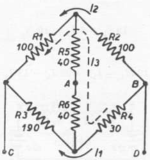


Fig. 93.

Soluzione. Si possono stabilire i seguenti circuiti in cui scorrono, nei versi indicati, le correnti I_1, I_2 e I_3:

Circuito R_3-R_4	$220\,I_1 + 30\,I_3 = 10$ V	(a)
Circuito R_4-R_6-R_5-R_1	$30\,I_1 + 100\,I_2 + 210\,I_3 = 10$ V	(b)
Circuito R_3-R_6-R_5-R_2	$190\,I_1 + 100\,I_2 - 80\,I_3 = 10$ V	(c)

Dalle uguaglianze (b) e (c):

$$30\,I_1 + 100\,I_2 + 210\,I_3 = 190\,I_1 + 100\,I_2 - 80\,I_3$$

si eliminano gli uguali valori di I_2:

$$290\, I_3 = 160\, I_1 \qquad I_3 = \frac{160}{290}\, I_1 = 0{,}55\, I_1$$

sostituendo questo valore nella (a):

$$220\, I_1 + 16{,}56\, I_1 = 10 \qquad I_1 = \frac{10}{236} = 0{,}042 \text{ ed } I_3 = 0{,}042 \cdot 0{,}55 = 0{,}023$$

Conoscendo i valori delle correnti I_1 e I_3 la differenza di potenziale fra i punti A e B è data dalla somma delle cadute di tensione che si verificano su R_4 e R_6, cioè:

$$30\,(I_1 + I_3) + 40\, I_3 = 30\,(0{,}042 + 0{,}023) + 40 \cdot 0{,}023 = 1{,}95 + 0{,}920 = 2{,}87 \text{ V}$$

Problema 77. Nel circuito di fig. 79 determinare la corrente e la caduta di tensione in ogni resistore.

Soluzione.

Nella maglia *fdce*:

$$10\, I_1 + 6\, I_2 = 10 \text{ V} \tag{1}$$

nella maglia *bdca*:

$$10\, I_1 + 12\,(I_1 - I_2) = 22\, I_1 - 12\, I_2 = 12 \text{ V} \tag{2}$$

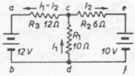


Fig. 94.

Moltiplicando la (1) per 2:

$$20\, I_1 + 12\, I_2 = 20 \tag{3}$$

Sommando la (3) e la (2):

$$42\, I_1 = 32 \qquad I_1 = 0{,}762 \text{ A}$$

valore questo che sostituito nella (1):

$$7{,}62 + 6\, I_2 = 10 \qquad 6\, I_2 = 2{,}38 \qquad I_2 = 0{,}396 \text{ A}$$

La corrente:

$$I_1 - I_2 = 0{,}762 - 0{,}396 = 0{,}366 \text{ A}$$

La caduta di tensione sui resistori è:

$$V_1 = 10 \cdot 0{,}762 = 7{,}62 \text{ V}$$
$$V_2 = 6 \cdot 0{,}396 = 2{,}38 \text{ V}$$
$$V_3 = 12 \cdot 0{,}366 = 4{,}39 \text{ V}$$

Problema 78. Nello stesso circuito del problema precedente si determinino i valori delle correnti nei vari resistori, tenendo presente che la corrente in ciascun ramo del circuito è la somma delle correnti nel ramo prodotte da ciascun generatore separatamente.

Soluzione. Il circuito va scomposto in due circuiti equivalenti, fig. 80. Nel primo circuito equivalente il valore della resistenza di R_1 ed R_2 in parallelo è:

$$\frac{10 \cdot 6}{10 + 6} = 3{,}75 \ \Omega$$

quindi la resistenza totale è:

$$12 + 3{,}75 = 15{,}75 \ \Omega$$

e la:

$$I_c = 12/15{,}75 = 0{,}763 \text{ A}$$

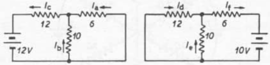


Fig. 95.

corrente che si suddividerà in R_1 ed R_2:

$$I_a = I_c R_1/(R_1 + R_2) = 0{,}763 \cdot 10/(10 + 6) = 0{,}477 \text{ A}$$
$$I_b = I_c R_2/(R_1 + R_2) = 0{,}763 \cdot 6/(10 + 6) = 0{,}286 \text{ A}$$

Nel secondo circuito equivalente il valore della resistenza di R_1 ed R_3 in parallelo è:

$$\frac{12 \cdot 10}{12 + 10} = 5{,}46 \ \Omega$$

quindi la resistenza totale è:

$$6 + 5{,}46\ \Omega = 11{,}46\ \Omega$$

e la:

$$I_f = 10/11{,}46 = 0{,}873\ \text{A}$$

corrente che si suddividerà in R_1 ed R_3:

$$I_d = 0{,}873 \cdot 10/(10 + 12) = 0{,}397\ \text{A}$$

$$I_e = 0{,}873 \cdot 12/(10 + 12) = 0{,}476\ \text{A}$$

Effettuando la somma delle correnti in ciascun resistore, tenendo conto del verso in cui circolano:

nella R_1 si ha $\quad I_b + I_e = 0{,}286 + 0{,}476 = 0{,}762$ A

nella R_2 si ha $\quad I_f - I_a = 0{,}873 - 0{,}477 = 0{,}396$ A

nella R_3 si ha $\quad I_e - I_d = 0{,}763 - 0{,}397 = 0{,}366$ A

Problema 79. Qual'è il valore della tensione del punto A rispetto massa nel circuito di fig. 96 (ruota di Ferris)?

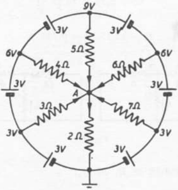


Fig. 96.

Soluzione. La somma algebrica delle intensità delle correnti nel punto A ha un valore nullo (primo principio di Kirchhoff).

Si assume per il punto A un valore di tensione qualsiasi, $V = 2$ volt, mentre gli estremi esterni dei resistori sono ai potenziali fissi indicati sullo schema.

Per le correnti, indicate arbitrariamente con le frecce intorno al punto A, si può stabilire la relazione seguente:

$$\frac{3-V}{3}+\frac{6-V}{4}+\frac{9-V}{5}+\frac{6-V}{6}+\frac{3-V}{7}-\frac{V}{2}=0$$

$$\frac{420-140\ \text{V}+630-105\ \text{V}+756-84\ \text{V}+420-70\ \text{V}+180-60\ \text{V}-210\ \text{V}}{420}=0$$

$$\frac{2406}{420}-\frac{669\ \text{V}}{420}=0 \qquad 5{,}72=\frac{669\ \text{V}}{420} \qquad V=\frac{2406}{669}=3{,}6\ \text{V circa.}$$

CIRCUITO MAGNETICO

Problema 80. Quali valori hanno il flusso Φ e l'induzione B in una bobina senza nucleo, lunga 25 cm e con sezione di 20 cm², se nell'avvolgimento di 10 000 spire circola una corrente di 0,5 A?

Soluzione. La forza magnetica è:

$$H=\frac{N\,I}{l}=\frac{10^4\cdot 0{,}5}{0{,}25}=2\cdot 10^4\ \text{Asp/m}$$

Poichè la permeabilità dell'aria è $\mu=1{,}25\cdot 10^{-6}$, l'induzione:

$$B=\mu\,H=1{,}25\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^4=2{,}5\cdot 10^{-2}=0{,}025\ \text{Wb/m}^2$$

Il flusso:

$$\Phi=B\,s=0{,}025\cdot 20\cdot 10^{-4}=0{,}5\cdot 10^{-4}=0{,}05\ \text{mWb}$$

Problema 81. Qual è la forza magnetica H in una bobina di 500 spire, avvolta su di un anello di ferro della lunghezza media di 70 cm, in cui circola una corrente di 1 A? Qual è il valore dell'induzione B corrispondente, se la permeabilità $\mu=0{,}004$? Se si toglie il nucleo di ferro quale valore assume l'induzione?

Soluzione. La forza magnetica è:

$$H=\frac{N\,I}{l}=\frac{500\cdot 1}{0{,}70}=714{,}2\ \text{Asp/m}$$

L'induzione, con il nucleo di ferro, è:

$$B=0{,}004\cdot 714{,}2=2{,}85\ \text{Wb/m}^2$$

Senza il nucleo di ferro l'induzione è:

$$B = 714{,}2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} = 0{,}00089 \text{ Wb/m}^2$$

Problema 82. Qual è la permeabilità effettiva di un materiale ferroso con una permeabilità relativa $\mu_r = 1600$? Qual è l'induzione in un circuito magnetico chiuso costituito da questo materiale se la forza magnetica agente è di 500 Asp/m? Qual è il flusso che attraversa questo circuito, che ha una sezione di 10 cm²?

Soluzione. La permeabilità effettiva è:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r = 1{,}256 \cdot 10^{-6} \cdot 1600 = 2008 \cdot 10^{-6} = 0{,}002 \text{ H/m}$$

L'induzione:

$$B = \mu H = 0{,}002 \cdot 500 = 1 \text{ Wb/m}^2$$

il flusso:

$$\Phi = B s = 1 \cdot 0{,}001 = 0{,}001 \text{ Wb}$$

Problema 83. Qual è la riluttanza in Asp/Wb di un nucleo di ferro chiuso, della lunghezza media 1 m e la sezione di 40 cm², se la sua permeabilità relativa è $\mu_r = 1500$?

Soluzione. La permeabilità effettiva è:

$$\mu = 1500 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} = 1{,}88 \cdot 10^{-3}$$

e la riluttanza:

$$R = \frac{l}{\mu s} = \frac{1}{1{,}88 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{75{,}2 \cdot 10^{-7}} = \frac{10^7}{75{,}2} = 132\,900 \text{ Asp/Wb}$$

Problema 84. Un solenoide, senza nucleo magnetico, è costituito da 100 spire percorse da una corrente $I = 10$ A. Di quanto aumenterà o diminuirà la forza magnetomotrice se si avvolge il solenoide con 400 spire facendovi circolare una corrente di 5 A, oppure con 500 spire ed $I = 2$ A o con 1000 spire ed $I = 1{,}5$ A?

Soluzione.

$$F = N I = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ Asp}$$
$$F = 400 \cdot 5 = 2000 \text{ Asp}$$
$$F = 500 \cdot 2 = 1000 \text{ Asp}$$
$$F = 1000 \cdot 1{,}5 = 1500 \text{ Asp}$$

Problema 85. Su di un pacco di lamierini di ferro, con lunghezza media del circuito magnetico di cm 30 e di sezione $s = 8$ cm², sono avvolte 1000 spire. Se la permeabilità relativa del nucleo è di 5000 quale valore deve avere l'intensità della corrente da inviare nell'avvolgimento per ottenere un'induzione di 0,5 Wb/m²? Quale valore hanno la riluttanza del circuito magnetico ed il flusso che lo percorre?

Soluzione. La permeabilità effettiva del ferro è:

$$\mu = 5000 \cdot 1{,}256 \cdot 10^{-6} = 0{,}0062 \text{ H/m}$$

$$B = 0{,}5 = \mu H = 0{,}0062 \frac{1000\, I}{0{,}3}$$

$$I = \frac{0{,}15}{6{,}2} = 0{,}024 \text{ A}$$

La riluttanza del circuito magnetico:

$$R = \frac{l}{\mu s} = \frac{0{,}3}{6 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = \frac{3 \cdot 10^{6}}{48} = 62\,500 \text{ Asp/Wb}$$

ed il flusso:

$$\Phi = B s = 0{,}5 \cdot 0{,}0008 = 0{,}0004 \text{ Wb}$$

Problema 86. Una bobina avvolta in aria ha una lunghezza $l = 10$ cm ed una sezione $s = 10$ cm². Determinare la f.m.m. F, necessaria per ottenere un flusso $\Phi = 50$ μWb. Determinare il numero delle spire N necessarie se la corrente che si fa circolare nell'avvolgimento è $I = 1$ A. Se lo stesso avvolgimento è eseguito su di un nucleo di ferro con permeabilità relativa $\mu_r = 1750$ quale corrente è necessaria per ottenere lo stesso flusso?

Soluzione.

$$F = R\,\Phi = \frac{l\,\Phi}{\mu s} = \frac{0{,}1 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}} = \frac{5 \cdot 10^{3}}{1{,}25} = 4 \cdot 10^{3} \text{ Asp}$$

$$N = \frac{F}{I} = 4 \cdot 10^{3}/1 = 4000 \text{ spire}$$

Con il nucleo di ferro, la cui permeabilità $\mu = 1{,}75 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} = 2{,}18 \cdot 10^{-3}$:

$$F = \frac{0{,}1 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{2{,}18 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{2{,}18} = 2{,}3 \text{ Asp}$$

$$I = \frac{F}{N} = \frac{2{,}3}{4000} = 0{,}00057 \text{ A} = 0{,}57 \text{ mA}$$

Problema 87. Su di un nucleo di ferro al silicio chiuso, con sezione di 20×20 mm e lunghezza media del circuito magnetico di 100 mm, si effettui un avvolgimento che, attraversato dalla corrente, lo magnetizzi con una induzione di 1 Wb/m²: di quante amperspire si deve disporre? La permeabilità relativa del ferro silicio, in corrispondenza dell'induzione voluta, è di 2000.

Soluzione. La sezione trasversale del nucleo è $s = 20 \cdot 20 = 400$ mm² $=$ $= 0{,}0004$ m².

Il flusso totale dovrà essere:

$$\Phi = B \cdot s = 1 \cdot 0{,}0004 = 0{,}0004 \text{ Wb}$$

La permeabilità assoluta è:

$$\mu = 2000 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}$$

La riluttanza:

$$R = \frac{l}{\mu\, s} = \frac{0{,}1}{0{,}0025 \cdot 0{,}0004} = \frac{10^{-1}}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^{7}}{100} =$$

$$= 100\,000 \text{ Asp/Wb}$$

La forza magnetomotrice:

$$F = R \cdot \Phi = 10^{5} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 40 \text{ Asp}$$

Problema 88. Su di un nucleo magnetico in ferro, di lunghezza $l = 20$ cm e sezione $s = 4$ cm², sono avvolte 10 000 spire di filo. Quale flusso e quale corrente sono necessari per ottenere una forza magnetica $H = 400$ Asp/m? Quale flusso e quale corrente necessiteranno per ottenere $H = 6000$ Asp/m?

Soluzione. Dalla caratteristica μ/H del ferro si ricava $H = 400$, $\mu = 2000$ e per $H = 6000$, $\mu = 226$.

$$\Phi = B \cdot s = \mu\, H\, s = 2 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{2} \cdot 4{,}10^{-4} = 40 \cdot 10^{-5} = 0{,}4 \text{ mWb}$$

$$I = \frac{H\, l}{N} = \frac{4 \cdot 10^{2} \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{10^{4}} = \frac{80}{10^{4}} = 0{,}008 \text{ A}$$

Nel secondo caso:

$$\Phi = \mu\, H\, s = 226 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{3} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 67{,}8 \cdot 10^{-5} = 0{,}67 \text{ mWb}$$

$$I = \frac{H\, l}{N} = \frac{6 \cdot 10^{3} \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{10^{4}} = 0{,}12 \text{ A}$$

Ad un aumento della forza magnetica H di 15 volte corrisponde un aumento di corrente di 15 volte mentre il flusso è aumentato di appena 1,67 volte per la diminuzione della permeabilità.

Problema 89. La lunghezza media del circuito magnetico di un pacco di lamierini di ferro al silicio è di 20 cm; la sezione del pacco è di 25 × 25 mm. Lungo un braccio risulta un traferro di 0,1 mm. La permeabilità relativa del ferro al silicio è di 2000 per l'induzione voluta di 1 Wb/m². Calcolare gli amperspire necessari alla magnetizzazione e la forza magnetica, sia nel ferro che nel traferro.

Soluzione. La sezione trasversale del nucleo è $s = 25 \cdot 25 = 625$ mm² = = 0,000625 m².

Il flusso:

$$\Phi = B\,s = 1 \cdot 0{,}000625 = 0{,}000625 \text{ Wb}$$

La permeabilità del ferro silicio è:

$$\mu = \mu_o \cdot \mu_r = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{3} = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ H/m}$$

La riluttanza del ferro è:

$$R_f = \frac{l}{\mu\,s} = \frac{0{,}2}{2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}} = \frac{2 \cdot 10^{6}}{15{,}62} = 128\,000 \text{ Asp/Wb}$$

La riluttanza dello strato di aria nel traferro:

$$R_t = \frac{0{,}0001}{1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^{6}}{7{,}81} = 128\,000 \text{ Asp/Wb}$$

La riluttanza totale del circuito magnetico è:

$$R = R_f + R_t = 128\,000 + 128\,000 = 256\,000 \text{ Asp/Wb}$$
$$F = R \cdot \Phi = 2{,}56 \cdot 10^{5} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4} = 160 \text{ Asp}$$

La forza magnetica nel ferro è:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{1}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 400 \text{ Asp/m}$$

e per una lunghezza di 20 cm occorrono:

$$400 \cdot 0{,}2 = 80 \text{ Asp}$$

La forza magnetica nell'aria è:

$$H = \frac{1}{1{,}25 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{1{,}25} = 8 \cdot 10^5$$

e per una lunghezza di 0,1 mm occorrono:

$$8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-4} = 80 \text{ Asp}$$

Problema 90. Un altoparlante elettrodinamico ha un elettromagnete della forma di fig. 97. Nella bobina di eccitazione, con 1000 Ω di resistenza, si possono dissipare 10 W. Si vuole avere un'induzione effettiva nel traferro di 0,9 Wb/m². Le dimensioni del nucleo, del traferro e della piastra frontale sono indicate in mm sulla figura. Quale deve essere il numero delle spire da avvolgere sul nucleo?

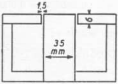


Fig. 97.

Soluzione. Il traferro è lungo 1,5 mm; la sua sezione è data dalla lunghezza del perimetro del nucleo per l'altezza della piastra frontale:

$$s = 2\,\pi\, r\, a = 6{,}28 \cdot 17{,}5 \cdot 6 = 6{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

La riluttanza del materiale magnetico è trascurabile rispetto quella del traferro, che ha un valore di:

$$R = \frac{l}{\mu\, s} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-4}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^7}{8{,}25} = 1{,}82 \cdot 10^6 \text{ Asp/Wb}$$

Il flusso prodotto dall'elettromagnete non è tutto concentrato nel traferro, malgrado l'ottima permeabilità del materiale magnetico adoperato (ferro Armco); una parte di esso si chiude esternamente alla parte utilizzata del traferro ed occorre ammettere una perdita del 30%. Anche l'induzione va aumentata del 30% e portata a 1,17 Wb/m². Il flusso prodotto:

$$\Phi = B\, s = 1{,}17 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-4} = 7{,}75 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

e la forza magnetomotrice necessaria:

$$F = R\, \Phi = 1{,}82 \cdot 10^6 \cdot 7{,}75 \cdot 10^{-4} = 1410 \text{ Asp}$$

Dalla potenza dissipabile nella bobina e dalla sua resistenza risulta la corrente di eccitazione:

$$I^2 = P/R = 0{,}01 \qquad I = 0{,}1 \text{ A}$$

Le spire avvolte sulla bobina debbono risultare:

$$N = 1410/0{,}1 = 14\,100$$

ed il filo deve avere un diametro minimo di 0,22 mm se si vuol mantenere la densità di corrente a 3 A/mm².

Problema 91. Su un nucleo di lamierini di ferro silicio, di lunghezza media $l = 15$ cm e sezione $s = 4$ cm², sono avvolte 400 spire. In esse si fa circolare una corrente $I = 0{,}5$ A. Calcolare il flusso, l'induttanza della bobina e l'energia magnetica.

Soluzione. La forza magnetica è:

$$H = \frac{N\,I}{l} = \frac{400 \cdot 0{,}5}{0{,}15} = 1333 \text{ Asp/m}$$

Corrispondentemente ad $H = 1333$ Asp/m si ha per il ferro silicio $\mu = 800$:

$$B = \mu\,H = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 800 \cdot 1333 = 1{,}33 \text{ Wb/m}^2$$

$$\Phi = B\,s = 1{,}33 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 5{,}32 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$L = \mu_0\,\mu_r \frac{N^2\,s}{l} = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 800 \; \frac{400^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0{,}15} = 0{,}42 \text{ H}$$

$$W = 0{,}5\,L\,I^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}052 \text{ J}$$

Problema 92. Qual è la forza che sollecita la bobina mobile di un altoparlante, costituita da 30 spire avvolte su di un supporto di carta di 35 mm di diametro, quando è attraversata da una corrente di 80 mA, se l'induzione del campo magnetico esistente nel traferro è di 0,9 Wb/m²? (La forza corrispondente ad 1 newton equivale a 102 g).

Soluzione. La lunghezza di ogni spira è:

$$l = 2\,\pi\,r = 3{,}14 \cdot 35 = 110 \text{ mm}$$

e la lunghezza totale dell'avvolgimento è di $110 \cdot 30 = 3{,}30$ m.

La forza è:

$$F = B\,l\,I = 0{,}9 \cdot 3{,}30 \cdot 0{,}08 = 0{,}237 \text{ newton} = 23{,}2 \text{ g}$$

AUTOINDUZIONE

Problema 93. Qual è la f. e. m. indotta in un avvolgimento di 100 spire quando il flusso che lo attraversa varia da 2000 a 1000 μWb in un centesimo di secondo?

Soluzione. La f. e. m indotta in una spira è $E = \Delta \Phi / \Delta t$ e riferendosi al numero di spire:

$$100\, E = 100 \; \frac{0{,}002 - 0{,}001}{0{,}01} = 100 \cdot 0{,}1 = 10 \text{ V}$$

Problema 94. Una bobina toroidale, con diametro medio di 10 cm, è avvolta su un nucleo di materiale isolante con 10000 spire. La sezione del nucleo è di 9 cm^2. Determinare l'induzione B ed il flusso Φ ottenuti facendo circolare nell'avvolgimento una corrente $I = 20$ mA. Se la corrente è interrotta ed il flusso si porta a zero in un tempo $t = 1$ μsec quale f. e. m. è indotta in una spira avvolta anch'essa intorno al nucleo? In quanto tempo il flusso deve annullarsi affinchè la f. e. m. indotta nella spira risulti di 1 V?

Soluzione. La lunghezza dell'avvolgimento è:

$$l = 2\,\pi\, r = 6{,}28 \cdot 0{,}05 = 0{,}31 \text{ m}$$

La forza magnetica:

$$H = \frac{N\, I}{l} = \frac{10^4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0{,}31} = \frac{200}{0{,}31} = 645 \text{ Asp/m}$$

L'induzione:

$$B = \mu\, H = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}45 \cdot 10^2 = 8{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$$

$$\Phi = B\, s = 8{,}06 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 7{,}25 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

La f. e. m. indotta nella spira:

$$E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{7{,}25 \cdot 10^{-7}}{10^{-6}} = 0{,}725 \text{ V}$$

Per ottenere una f. e. m. indotta di 1 V il flusso si dovrà annullare nel tempo:

$$t = \frac{\Phi}{E} = 7{,}25 \cdot 10^{-7}/1 = 0{,}725\ \mu\text{sec}$$

Problema 95. Su di un pacco di lamierini al ferro silicio, con lunghezza media del circuito magnetico di 20 cm e sezione di 9 cm^2, che si ritiene percorso da un'induzione $B = 1,2$ Wb/m^2, sono effettuati due avvolgimenti isolati fra loro. Nel primo, di 1000 spire, quale corrente dovrà circolare per ottenere l'induzione suddetta? Se il flusso prodotto si annulla in un centesimo di secondo quale f. e. m. è indotta nel secondo avvolgimento di 10 000 spire?

Soluzione. Poichè la sezione è di 9 cm^2 all'induzione $B = 1,2$ Wb/m^2 corrisponde un flusso:

$$\Phi = B \cdot s = 1,2 \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 10,8 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

Dalla caratteristica $B\,H$ del ferro silicio si rileva che ad un valore di $B = 1,2$ Wb/m^2 corrisponde un valore di $H = 700$ Asp/m:

$$I = \frac{H\,l}{N} = \frac{7 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{-1}}{10^3} = 140 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 140 \text{ mA}$$

La f. e. m. indotta nel secondo avvolgimento:

$$E = \frac{N\,\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{10,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4}{10^{-2}} = 1080 \text{ V}$$

Problema 96. Su di un pacco di lamierini di ferro silicio, con circuito magnetico di lunghezza $l = 25$ cm, sono effettuati due avvolgimenti: in quello con 1000 spire è indotta una f. e. m. di 10 V quando il flusso è fatto variare sino al valore massimo in 1/50 di sec. Facendo lavorare il ferro con un'induzione di 1 Wb/m^2 quale dovrà essere la sezione del nucleo, la forza magneto motrice, ed il numero delle spire dell'altro avvolgimento se la corrente che circola in questo dovrà raggiungere il valore massimo di 0,2 A?

Soluzione. Il flusso dovrà raggiungere il valore:

$$\Phi = \frac{E\,t}{N} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{10^3} = 2 \cdot 10^{-4} = 0,2 \text{ mWb}$$

Per l'induzione data:

$$s = \frac{\Phi}{B} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 2 \text{ cm}^2$$

Per il ferrosilicio ad una $B = 1$ Wb/m^2 corrisponde $H = 400$ Asp/m per cui le spire dell'avvolgimento percorso dalla corrente di 0,2 A:

$$N = \frac{H\,l}{I} = \frac{400 \cdot 0,25}{0,2} = 500 \text{ spire}$$

Problema 97. Qual è il valore dell'induttanza di una bobina avvolta con 100 spire di filo, di diametro 0,20 mm, su di un tubo di cartone bachelizzato di 20 mm di diametro esterno, per una lunghezza di 25 mm?

Soluzione. Il valore dell'induttanza, trascurando l'aumento di diametro dell'avvolgimento di 0,20 mm, uguale cioè al diametro del filo, è:

$$L = 0{,}01 \frac{N^2 D^2}{l} = 0{,}01 \frac{100^2 \cdot 2^2}{2{,}5} = 160 \ \mu\text{H}$$

Problema 98. Qual è l'induttanza di una bobina cilindrica avvolta con 100 spire su di un tubo di 20 mm di diametro esterno, per una lunghezza di 20 mm? Quale induttanza si ottiene avvolgendo lo stesso numero di spire su di un tubo di 30 mm di diametro esterno per una lunghezza di 30 mm e quale ne sarà il valore effettuando l'avvolgimento su di un tubo di 40 mm di diametro e 40 mm di lunghezza?

Soluzione. La bobina avvolta sul tubo di 20 mm di diametro per una lunghezza di 20 mm ha un'induttanza:

$$L = 0{,}01 \frac{N^2 D^2}{l} = 0{,}01 \frac{100^2 \cdot 2^2}{2} = 200 \ \mu\text{H}$$

Quella con diametro 30 mm e lunghezza dell'avvolgimento di 30 mm:

$$L = 0{,}01 \frac{100^2 \cdot 3^2}{3} = 300 \ \mu\text{H}$$

Quella con diametro di 40 mm e lunghezza dell'avvolgimento di 40 mm:

$$L = 0{,}01 \frac{100^2 \cdot 4^2}{4} = 400 \ \mu\text{H}$$

Problema 99. Se di una bobina cilindrica, senza nucleo magnetico, si raddoppia il numero delle spire, mantenendone costanti tutte le dimensioni, perchè l'induttanza della bobina assume un valore quattro volte maggiore? Perchè di due bobine, avvolte con lo stesso numero di spire, quella con tutte le dimensioni doppie dell'altra ha un'induttanza doppia?

Soluzione. L'induttanza di una bobina si quadruplica quando si raddoppia il numero di spire N perchè nella formula per il suo calcolo il numero N appare al numeratore elevato a quadrato:

$$L = 0{,}01 \frac{N^2 D^2}{l}$$

Dalla formula precedente si ricava che una bobina che ha lo stesso numero di spire di un'altra ma un diametro doppio ha un'induttanza quadrupla della seconda, ma se anche la lunghezza della bobina suddetta è raddoppiata l'induttanza risulta solo di valore doppio.

Problema 100. Quante spire debbono essere avvolte su di un tubo di 2,5 cm di diametro per una lunghezza di 2 cm per ottenere un valore dell'induttanza della bobina di 4 μH?

Soluzione. Dalla nota formula per il calcolo del valore dell'induttanza si ricava:

$$N = \frac{\sqrt{L\,(l + 0{,}45\,D)}}{0{,}1\,D} = \frac{\sqrt{4\,(2 + 0{,}45 \cdot 2{,}5)}}{0{,}1 \cdot 2{,}5} = 8\sqrt{2 + 1{,}125} = 14{,}2 \text{ spire}$$

Problema 101. Una bobina a nido d'api di 2000 spire ha le seguenti dimensioni: diametro medio 7 cm, lunghezza dell'avvolgimento 2,54 cm, spessore dell'avvolgimento 1,9 cm. Qual è il valore della sua induttanza?

Soluzione.

$$L = \frac{0{,}2\,D^2\,N^2}{7{,}6\,D + 22{,}8\,l + 25{,}4\,S} = \frac{0{,}2 \cdot 4{,}9 \cdot 4 \cdot 10^6}{53 + 56 + 48} = \frac{39 \cdot 10^6}{157} = 0{,}25 \text{ H}$$

Problema 102. Una bobina cilindrica di 200 μH, avvolta su di un tubo di 25 mm di diametro per una lunghezza di 25 mm, è piazzata in uno schermo cilindrico di alluminio di 38 mm di diametro interno, lungo 55 mm. Quale riduzione subisce l'induttanza della bobina?

Soluzione.

$$\frac{\Delta L}{L_o} = \frac{\dfrac{l}{d}}{\dfrac{l}{d} + 1{,}55}\left(\frac{r_b}{r_s}\right)^2 =$$

$$= \frac{\dfrac{2{,}5}{0{,}65}}{\dfrac{2{,}5}{0{,}65} + 1{,}55}\left(\frac{12{,}5}{19}\right)^2 = \frac{3{,}85}{3{,}85 + 1{,}55} \cdot 0{,}435 = 0{,}31$$

Formule in cui l = lunghezza dell'avvolgimento in cm, d = distanza in cm della bobina dalla zona cilindrica dello schermo, r_b = raggio della bobina in mm, r_s = raggio dello schermo in mm.

La riduzione dell'induttanza risulta:

$$\Delta L = 0{,}31\ L_o = 0{,}31 \cdot 200 = 64{,}5\ \mu\text{H}$$

La bobina schermata avrà un'induttanza di:

$$200 - 64{,}5 = 135{,}5\ \mu\text{H}$$

Problema 103. Qual è l'induttanza di una bobina toroidale avvolta con 300 spire su di un nucleo di ferro per AF, con $\mu_r = 700$, lunghezza media della circonferenza 20 cm e sezione 2 cm²?

Soluzione. Il valore dell'induttanza è:

$$L = \mu_o\, \mu_r \frac{N^2 s}{l} = 1{,}25 \cdot 10^{-6} \cdot 700 \frac{300^2\, 2 \cdot 10^{-4}}{0{,}2} = \frac{157{,}5 \cdot 10^{-4}}{0{,}2} =$$

$$= 787 \cdot 10^{-4}\ \text{H} = 78{,}7\ \text{mH}$$

Problema 104. Una bobina cilindrica è avvolta con 300 spire su di un tubo isolante con diametro $D = 2$ cm e lunghezza $l = 5$ cm. Qual è il valore della sua induttanza e quello della f. e. m. di autoinduzione se la corrente di 100 mA che vi circola è ridotta a zero in 1/100 sec.

Soluzione. Il valore dell'induttanza è:

$$L = \frac{0{,}01\ N^2\, D^2}{l} = \frac{10^{-2} \cdot 3^2 \cdot 10^4 \cdot 2^2}{5} = \frac{3600}{5} = 720\ \mu\text{H}$$

La f. e. m. di autoinduzione che si ha nella bobina è:

$$E = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 720 \cdot 10^{-6} \frac{0{,}1}{0{,}01} = 7200 \cdot 10^{-6} = 7200\ \mu\text{V}$$

MUTUA INDUZIONE

Problema 105. Quale mutua induzione esiste fra due bobine se, variando la corrente che circola in una di esse di 1 A in 1/100 sec, si ottiene nell'altra una tensione indotta di 10 V?

Soluzione. Dalla formula:

$$E = M \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

si ricava:

$$M = \frac{E\,\Delta t}{\Delta I} = \frac{10 \cdot 0{,}01}{1} = 0{,}1\ \text{H}$$

Problema 106. Due bobine sono avvolte su un tubo di 20 mm di diametro con filo smaltato con diametro esterno di 0,15 mm. Una di esse è costituita di 30 spire, l'altra di 60. La distanza fra i due avvolgimenti è di 6 mm. Qual è il valore della mutua induzione fra le due bobine?

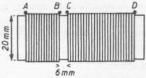


Fig. 98.

Soluzione. Ritenendo di avere un unico avvolgimento da A a D con prese in B e C si ha:

$$M = 0{,}5\,(L_{AD} + L_{BC} - L_{AC} - L_{BD})$$

Nello spazio BC sarebbero comprese $6/0{,}15 = 40$ spire se l'avvolgimento risultasse continuo, quindi l'avvolgimento AD comprende 130 spire su una lunghezza $l = 130 \cdot 0{,}15 = 19{,}5$ mm.

$$L_{AD} = 0{,}01\,\frac{N^2\,D^2}{l} = \frac{0{,}01 \cdot 130^2 \cdot 2^2}{1{,}95} = 346\ \mu\text{H}$$

$$L_{BC} = 0{,}01\,\frac{40^2 \cdot 2^2}{0{,}6} = 106\ \mu\text{H}$$

$$L_{AC} = 0{,}01\,\frac{70^2 \cdot 2^2}{1{,}05} = 186\ \mu\text{H}$$

$$L_{BD} = 0{,}01\,\frac{100^2 \cdot 2^2}{1{,}5} = 206\ \mu\text{H}$$

$$M = 0{,}5\,(346 + 106 - 186 - 206) = 40\ \mu\text{H}$$

Problema 107. Misurando l'induttanza di due bobine accoppiate fra loro e collegate in serie si ottiene il valore $L_1 = 500$ mH. Invertiti i collegamenti di una di esse si ottiene il valore $L_2 = 300$ mH: qual è la mutua induzione esistente fra le bobine?

Soluzione. La mutua induzione è:

$$M = \frac{L_1 - L_2}{4} = \frac{500 - 300}{4} = 50 \text{ mH}$$

Problema 108. Fra una bobina di 0,08 H ed una di 2 H esiste una mutua induzione di 0,1 H: quale valore ha il coefficiente di accoppiamento fra le bobine? Se in serie alla bobina di 0,08 H se ne collega un'altra di 0,06 H, che non ha alcun accoppiamento con le bobine suddette, la mutua induttanza fra le due bobine accoppiate conserva il valore di 0,1 H: qual è il nuovo valore del coefficiente di accoppiamento?

Soluzione. Nel primo caso:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}08 \cdot 2}} = 0{,}25$$

Nel secondo caso:

$$k = \frac{0{,}1}{\sqrt{(0{,}08 + 0{,}06) \cdot 2}} = 0{,}189$$

Problema 109. I due avvolgimenti di un variometro hanno le induttanze $L_1 = 100$ μH ed $L_2 = 150$ μH: il coefficiente di accoppiamento esistente fra essi, quando risultano coassiali, è $k = 0{,}5$. Quali sono i valori minimo e massimo che raggiunge l'induttanza del variometro?

Soluzione. Poichè:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0{,}5 \qquad M = 0{,}5\,\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}5\,\sqrt{100 \cdot 150} = 61{,}25 \ \mu\text{H}$$

I valori minimo e massimo dell'induttanza risultano:

$$L_m = L_1 + L_2 - 2\,M = 100 + 150 - 122{,}5 = 127{,}5 \ \mu\text{H}$$
$$L_M = L_1 + L_2 + 2\,M = 100 + 150 + 122{,}5 = 372{,}5 \ \mu\text{H}$$

Problema 110. Una bobina di 100 μH è collegata in serie ad un'altra di 220 μH. L'induttanza totale delle due bobine accoppiate è di 140 μH. Qual è la mutua induzione esistente fra le due bobine? Qual è il coefficiente di accoppiamento? Quale valore dell'induttanza si realizza invertendo i collegamenti ai terminali di una delle bobine?

Soluzione. Le due bobine sono evidentemente collegate in opposizione:

$$0{,}0001 + 0{,}00022 - 2\,M = 0{,}00014 \text{ H}$$
$$2\,M = 0{,}00032 - 0{,}00014 = 0{,}00018 \text{ H}$$
$$M = 0{,}00009 \text{ H} = 90\ \mu\text{H}$$

Il coefficiente di accoppiamento è:

$$k = \frac{0{,}00009}{\sqrt{10^{-4} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-4}}} = \frac{0{,}00009}{10^{-4}\sqrt{2{,}2}} = \frac{0{,}9}{1{,}48} = 0{,}607$$

Invertendo i collegamenti ad una bobina:

$$0{,}0001 + 0{,}00022 + 0{,}00018 = 0{,}00050 \text{ H} = 500\ \mu\text{H}$$

CAMPO ELETTRICO

Problema 111. Quale tensione viene a determinarsi fra le armature di un condensatore di 40 μF a cui sia stata comunicata la carica di 0,008 C?

Soluzione. La tensione presente fra le armature dopo la carica è:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{0{,}008}{40 \cdot 10^{-6}} = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{6}}{40} = \frac{8000}{40} = 200 \text{ V}$$

Problema 112. Quanti microcoulomb occorrono per caricare un condensatore di 0,2 μF per far risultare fra le armature una tensione di 110 V?

Soluzione. La carica da fornire al condensatore è:

$$Q = C\,V = 0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 110 = 22 \cdot 10^{-6} = 0{,}000022 = 22\ \mu\text{C}$$

Problema 113. Quale sarà il valore della capacità risultante dal collegamento di otto condensatori uguali in parallelo se ogni condensatore assorbe la carica di 20 μC sotto la tensione di 400 V?

Soluzione. La capacità di ogni condensatore è:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{0{,}000020}{400} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{2}} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{4} = 0{,}5 \cdot 10^{-7} = 0{,}05\ \mu\text{F}$$

La capacità che si ottiene con il collegamento di otto condensatori in parallelo è:

$$C_t = 0{,}05 \cdot 8 = 0{,}4\ \mu\text{F}$$

Problema 114. Quale capacità va collegata in serie ad un condensatore di 100 pF per ottenere una capacità complessiva di 80 pF?

Soluzione. Dalla formula relativa alla capacità risultante dal collegamento di due capacità in serie:

$$C = \frac{C_1 \, C_2}{C_1 + C_2}$$

si ricava:

$$C\,(C_1 + C_2) = C_1 \, C_2$$

da cui:

$$C\,C_1 + C\,C_2 = C_1 \, C_2$$

$$C\,C_1 = C_1 \, C_2 - C\,C_2 = C_2\,(C_1 - C)$$

$$C_2 = \frac{C\,C_1}{C_1 - C} = \frac{80 \cdot 100}{100 - 80} = \frac{8000}{20} = 400 \text{ pF}$$

Infatti sostituendo i valori nella prima formula:

$$\frac{C_1 \, C_2}{C_1 + C_2} = \frac{100 \cdot 400}{100 + 400} = \frac{40000}{500} = 80 \text{ pF}$$

Problema 115. Qual è la capacità risultante dal collegamento in serie di tre condensatori di 60 μF ciascuno? Se ad ognuno è stata comunicata una carica di 0,03 C qual è la tensione totale risultante agli estremi del circuito suddetto?

Soluzione. Il valore della capacità risultante dal collegamento in serie:

$$C_t = \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}} = \frac{1}{\dfrac{3}{60}} = \frac{60}{3} = 20 \ \mu\text{F}$$

La tensione su ogni condensatore risulta:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-5}} = \frac{3 \cdot 10^{3}}{6} = 500 \text{ V}$$

e quella totale sul circuito di 1500 V.

Problema 116. Due condensatori, uno con capacità di 40 μF, l'altro di 60 μF, sono collegati in serie e sottoposti ad una tensione di 500 V. Qual è il valore della capacità risultante? Qual è la carica e la tensione relativa ad ogni condensatore?

Soluzione. La capacità risultante è:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{60 \cdot 40}{60 + 40} = \frac{2400}{100} = 24 \ \mu F$$

La carica di ogni condensatore è uguale a quella fornita ai due condensatori in serie:

$$Q = C\,V = 2{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{2} = 12 \cdot 10^{-3} \ C$$

ma le tensioni relative ad essi sono:

sul condensatore di 60 μF:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-5}} = 2 \cdot 10^{2} = 200 \ V$$

sul condensatore di 40 μF:

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-5}} = 3 \cdot 10^{2} = 300 \ V$$

Problema 117. Un condensatore è costituito da due lamine metalliche affacciate, poste alla distanza di 1 mm: esso ha la capacità di 500 pF ed alle sue armature è applicata una tensione di 1000 V. Qual è la carica che riceve? Se dopo averlo caricato si introduce fra le sue armature una lastra di vetro, di 1 mm di spessore (costante dielettrica = 5) e di dimensioni maggiori delle lamine, quali variazioni si hanno nella capacità, nella carica e nella tensione fra le armature?

Soluzione. La carica inizialmente data al condensatore è:

$$Q = C\,V = 500 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{3} = 5 \cdot 10^{-7} = 0{,}5 \ \mu C$$

Introducendo il dielettrico fra le armature aumenta la capacità ma la carica non può variare, quindi la tensione fra le armature deve proporzionalmente diminuire in modo che il prodotto $C\,V$ resti di valore costante. La capacità aumenta di 5 volte, raggiungendo il valore di 2500 pF; la tensione si riduce ad un quinto del valore iniziale, cioè 200 V.

Problema 118. Tre condensatori di 1, di 2 e di 10 μF sono collegati in serie fra loro, quindi si applica una tensione al loro circuito. Con un voltmetro, che non altera la tensione nè la capacità del condensatore di 10 μF, si ottiene una indicazione di 100 V. Qual è la tensione applicata alla serie di condensatori?

Soluzione. Una carica identica è stata data a tutti i tre condensatori ma la tensione su ognuno di essi è inversamente proporzionale alla capacità. La carica fornita al condensatore di 10 μF è:

$$Q = C\,V = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{2} = 10^{-3}\ \mathrm{C}$$

Sul condensatore di 1 μF la tensione è:

$$V = Q/C = 10^{-3}/10^{-6} = 10^{3} = 1000\ \mathrm{V}$$

Sul condensatore di 2 μF la tensione è:

$$V = 10^{-3}/2 \cdot 10^{-6} = 10^{3}/2 = 500\ \mathrm{V}$$

Problema 119. Applicando al circuito di fig. 99 una tensione di 100 V quale tensione risulterà fra le armature di ogni condensatore?

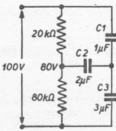


Fig. 99.

Soluzione. La tensione applicata si suddivide lungo il partitore resistivo proporzionalmente ai valori dei resistori ma non avviene altrettanto per i condensatori in modo inversamente proporzionale alle capacità perchè l'inserzione del condensatore di 2 μF altera una tale suddivisione.

Se la tensione fra le armature di C_1 è di x volt quella su C_2 è di $x - 20$ volt (perchè una sua armatura è collegata alla presa sul partitore, ad una tensione minore di 20 V di quella applicata al circuito) e quella su C_3 di $100 - x$ volt.

La carica di C_1 e C_2 deve avvenire attraverso C_3, essendo questo di capacità maggiore, quindi:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

uguaglianza in cui vanno sostituiti i valori suddetti:

$$3\,(100 - x) = 1\,x + 2\,(x - 20)$$

$$300 - 3\,x = 1\,x + 2\,x - 40 \qquad 6\,x = 340 \qquad x = \frac{340}{6} = 56{,}8$$

Quindi le tensioni sui condensatori risultano:

su C_1 56,8 V

su C_2 56,8 − 20 = 36,8 V

su C_3 100 − 56,8 = 43,2 V

Problema 120. Collegare cinque condensatori, ciascuno della capacità di 2 μF, in modo da ottenere una capacità totale fra gli estremi del circuito di 2 μF.

Soluzione. Quattro condensatori possono essere collegati in modo da costituire i quattro bracci di un circuito a ponte: la capacità fra due punti opposti di una diagonale risulta di due serie di capacità (ognuna di 2 e 2 μF con risultanza di 1 μF) messe in parallelo, quindi con capacità totale di 2 μF.

Il ponte con i quattro bracci uguali risulta bilanciato, quindi fra i punti opposti dell'altra diagonale non vi è alcuna d.d.p. e il quinto condensatore di 2 μF può essere inserito fra essi senza alterare il valore della capacità totale.

Problema 121. Un voltmetro elettrostatico, la cui capacità è di 5 pF, è collegato alle due armature di un condensatore di capacità incognita. Questo condensatore è carico ed il voltmetro indica 200 V. Si colleghi in parallelo alle due capacità suddette un condensatore di 15 pF ed il voltmetro indica 150 V. Qual è il valore x della capacità del condensatore caricato?

Soluzione. Con il voltmetro inserito fra le armature del condensatore carico la tensione indicata:

$$V = 200 = \frac{Q}{x + 5}$$

inserito anche il condensatore di 15 pF:

$$V = 150 = \frac{Q}{x + 20}$$

Poichè la carica Q è quella inizialmente data al condensatore di capacità incognita:

$$Q = 200\,(x + 5) = 150\,(x + 20)$$

$$200\,x + 1000 = 150\,x + 3000$$
$$200\,x - 150\,x = 3000 - 1000$$
$$50\,x = 2000$$

$$x = \frac{2000}{50} = 40 \text{ pF}$$

Problema 122. Qual è la capacità fra due lamine metalliche quadrate di 10 cm di lato separate da uno strato di aria di 0,1 mm? Quale sarà la carica di questo condensatore applicando fra le armature una tensione di 100 V? La costante dielettrica dell'aria è di 8,85 pF/m.

Soluzione. La superficie delle lamine è $s = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$ m^2.
La capacità fra le lamine è:

$$C = \frac{\varepsilon\, s}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-2}}{10^{-4}} = 885 \text{ pF}$$

La carica acquistata:

$$Q = C\,V = 885 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{2} = 0{,}0885 \ \mu\text{C}$$

Problema 123. Quante lamine di rame di $1{,}5 \times 2$ cm, separate da fogli di mica ($\varepsilon_r = 5{,}5$) di 0,05 mm di spessore, sono necessarie per la costruzione di un condensatore di 0,001 μF?

Soluzione. Ogni lamina ha una superficie di $3 \cdot 10^{-4}$ m^2 per faccia. Con ogni coppia di lamine si realizza una capacità:

$$C = \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon_r \cdot s}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 5{,}5 \cdot 3 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-5}} = 292 \text{ pF}$$

Con tre coppie di queste lamine, con interposte altrettante lamine di mica, ma considerando che ogni lamina di rame ha due facce (eccetto le due lamine estreme) sono necessarie due lamine di rame per ogni armatura per realizzare un condensatore di $3 \cdot 292 = 876$ pF. Aggiungendo un'altra lamina di rame, ed una di mica interposta, si raggiunge una capacità di $4 \cdot 292 = 1168$ pF, pertanto la lamina di rame aggiunta dovrà avere una superficie di circa la metà.

Problema 124. Quale capacità si ottiene ossidando una lamina di alluminio di 100×4 cm, sotto una tensione di 450 V, in un adatto elettrolita liquido? Lo spessore di ossido realizzato è di $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm e la costante dielettrica dell'ossido è $\varepsilon_r = 7$.

Soluzione. La superficie totale della lamina di alluminio è:

$$s = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}04 = 0{,}08 \text{ m}^2$$

La capacità esistente fra la lamina ossidata e l'elettrolita liquido in cui è immersa è:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_r s}{d} = \frac{8{,}85 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{0{,}5 \cdot 10^{-6}} = \frac{496 \cdot 10^4}{0{,}5} = 9\,920\,000 \text{ pF} = 10 \text{ }\mu\text{F} \sim$$

Problema 125. Due condensatori, $C_1 = 1$ µF e $C_2 = 2$ µF, sono caricati ognuno sotto la tensione di 100 V. Si portano quindi in contatto le armature di uno con quelle di polarità opposte dell'altro. Quale tensione risulta fra le armature di ogni condensatore? Qual è la carica in ognuno di essi?

Soluzione. Le cariche inizialmente date ai condensatori sono:

$$Q_1 = C_1 V = 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-4} \, C$$

$$Q_2 = C_2 V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 2 \cdot 10^{-4} \, C$$

Effettuando il contatto fra le armature il condensatore di 2 µF si scarica su quello di 1 µF, annullandone la carica, perdendo cioè 10^{-4} coulomb. La carica residua del condensatore di 2 µF, cioè i rimanenti 10^{-4} coulomb, si ripartiscono ora fra i due condensatori, che costituiscono una capacità unica di 3 µF.

Quindi la tensione presente su questa capacità totale risulta:

$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{10^{-4}}{3 \cdot 10^{-6}} = \frac{100}{3} = 33{,}3 \text{ V}$$

con le medesime polarità presenti sul condensatore C_2.

La carica posseduta da C_1 è ora di 0,33 Q, da C_2 di 0,66 Q.

Problema 126. Tre condensatori di 1,2 e 3 µF sono caricati alle tensioni di 150, 50 e 100 V. Dopo averli collegati in serie, come risulta dal circuito di figura 100, si mettono in contatto le due armature estreme. Quale carica si annulla a seguito di questo contatto? Quali tensioni risultano sui condensatori?

Soluzione. Le cariche possedute dai tre condensatori sono:

$$Q_1 = C_1 V = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 150 = 150 \text{ }\mu\text{C}$$

$$Q_2 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 100 \text{ }\mu\text{C}$$

$$Q_3 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 300 \text{ }\mu\text{C}$$

La capacità totale del circuito è:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{6+3+2}{6}} = \frac{6}{11} = 0{,}545\ \mu\text{F}$$

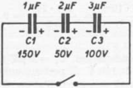


Fig. 100.

La carica totale che si annulla chiudendo l'interruttore corrisponde a questa capacità ed alla tensione totale di 300 V, cioè:

$$Q = 0{,}545 \cdot 300 = 164\ \mu\text{C}$$

Per ogni condensatore occorre sottrarre questa carica, quindi si otterrà per

$$C_1 = 150 - 164 = -14\ \mu\text{C}$$
$$C_2 = 100 - 164 = -64\ \mu\text{C}$$
$$C_3 = 300 - 164 = 136\ \mu\text{C}$$

Le tensioni risultanti sui condensatori sono su:

$$C_1 \quad V = Q/C_1 = -14/1 = -14\ \text{V}$$
$$C_2 \quad V = Q/C_2 = -64/2 = -32\ \text{V}$$
$$C_3 \quad V = Q/C_3 = 136/3 = 45{,}5\ \text{V}$$

cioè fra le armature di C_1 e C_2 le polarità risultano invertite rispetto quelle impartite al momento della carica.

Problema 127. Un condensatore è costituito da due lamine metalliche, poste orizzontalmente, alla distanza di 1 mm fra loro. Ad esse è applicata una tensione di 3000 V per caricarlo. Mantenendo carico il condensatore si poggia sull'armatura inferiore una lamina di mica, di 0,5 mm ($\varepsilon = 5$). Come si comporta il condensatore?

Soluzione. Lo spazio d'aria fra le armature è assoggettato durante la carica ad un campo elettrico di 3000 V/mm. Introducendo la lamina di mica si ottengono due condensatori in serie fra loro, uno con dielettrico aria, l'altro con dielettrico mica. Poichè la carica resta costante la tensione di 1500 V, che si ritiene applicata ad ognuno dei condensatori in serie, si deve ridurre ad un quinto poichè la capacità del condensatore si è quintuplicata: sul condensatore con dielettrico in mica si ha una tensione di 300 V, su quello in aria una di 2700 V. Poichè la distanza fra le armature è ora ridotta a 0,5 mm si ha la produzione di un effluvio continuo attraverso l'aria o di scariche.

Problema 128. Per la costruzione di condensatori a carta arrotolati, da 0,1 μF, si interpone fra le armature un doppio strato di carta di 0,06 mm di spessore, impregnata con cera sintetica ($\varepsilon_r = 4{,}5$). Le strisce di stagnola adoperate per le armature hanno una larghezza di 3 cm: quanto dovrà essere lunga ognuna di esse?

Soluzione. Dalla formula:

$$C = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_r\,s}{d} \quad \text{si ricava} \quad s = \frac{C\,d}{\varepsilon\,\varepsilon_r}$$

in cui s è in m², C in F, d in m ed $\varepsilon = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$.

$$s = \frac{10^{-7} \cdot 0{,}12 \cdot 10^{-3}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 4{,}5} = \frac{12}{39{,}8} = 0{,}3 \text{ m}^2 = 3000 \text{ cm}^2$$

Poichè le strisce sono larghe 3 cm e poichè di ognuna si utilizzano le due facce è sufficiente una lunghezza di circa 5 m per ognuna di esse.

FORMULARIO II

Circuito R-L in c.a.

Reattanza $X = 2\pi f L = \omega L$ (ohm).

Impedenza circuito serie $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ (ohm).

Impedenza circuito parallelo $Z = \dfrac{R X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ (ohm).

Corrente nel circuito $R - L$ $\quad I = V/Z$ (ampere).

Fattore di potenza $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$.

Fattore di merito $Q = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega L}{R_s} = \dfrac{R_p}{\omega L}$.

Potenza reattiva $P = V I \operatorname{sen}\varphi$ (VAR).

Potenza reale $P = V I \cos\varphi$ (watt).

Potenza apparente $P = V I$ (voltampere).

φ	$\cos\varphi$	φ	$\cos\varphi$
0°	1	120°	— 0,5
45°	0,707	180°	— 1
60°	0,5	270°	0
90°	0	360°	1

Circuito R-C in c.a.

Reattanza $X = \dfrac{1}{2 \pi f C} = \dfrac{1}{\omega C}$ (ohm).

Impedenza circuito serie $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ (ohm).

Impedenza circuito parallelo $Z = \dfrac{R X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$ (ohm).

Corrente nel circuito R-C $I = V/Z$ (ampere).

Fattore di potenza $\cos \varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}$.

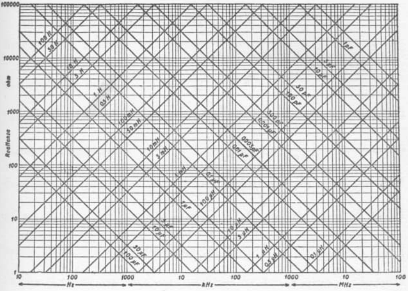


Fig. 101.

Fattore di merito $Q = \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{X}{R} = \dfrac{1}{\omega C R}$.

Potenza reale $P = V I \cos \varphi$ (watt).

Angolo di perdita $\vartheta = \operatorname{tg} \vartheta = \omega C R_s = \dfrac{1}{\omega C R_p}$.

Circuito R-C-L in c.a.

Frequenza di risonanza $f = \dfrac{1}{2\,\pi\,\sqrt{L\,C}}$ (hertz).

Lunghezza d'onda in metri $\lambda = 1885\,\sqrt{L\,C}$ (μH, μF).

Impedenza circuito serie $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.

Impedenza circuito serie a risonanza $Z = R$.

Impedenza circuito parallelo (con Q elevato)

$$Z \cong \frac{X_L\,X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\dfrac{L}{C}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\omega\,L}{1 - \omega^2\,L\,C}.$$

Impedenza circuito parallelo a risonanza

$$Z = \frac{L}{C\,R} = \frac{Q}{\omega\,C} = \omega\,L\,Q = \frac{\omega^2\,L^2}{R}.$$

Induttanza $L = \dfrac{1}{4\,\pi^2\,f^2\,C} = \dfrac{\lambda^2}{1885^2\,C}$.

Capacità $C = \dfrac{1}{4\,\pi^2\,f^2\,L} = \dfrac{\lambda^2}{1885^2\,L}$.

Larghezza banda passante $\Delta\,f = \dfrac{f}{Q}$.

Fattore di merito effettivo $Q_{eff} = \dfrac{Q}{1 + Q\,\dfrac{\omega\,L}{R_a}}$.

Costante di tempo.

Tensione alla carica $v_c = V_b\,(1 - \varepsilon^{-t/RC})$.

Corrente alla carica ed alla scarica $i = \dfrac{V}{R}\,\varepsilon^{-t/RC}$.

Tensione alla scarica $v_c = V\,\varepsilon^{-t/RC}$.

Trasformatori e alimentazione.

Sezione del nucleo $s = \sqrt{P_s}$ (cm^2).

Spire per volt $N/V = 50/s$.

Diametro del conduttore $d = 0{,}65 \sqrt{I}$ (mm).

Tensione alternata sul primo condensatore del filtro

$$V_r = \frac{150\, I}{2\, \pi f\, C} \quad (I \text{ mA},\ C\, \mu\text{F}).$$

Tensione alternata sul condensatore di uscita del filtro

$$\frac{V_r}{V_2} = \omega^2 L\, C = \frac{X_L - X_C}{X_C}.$$

Rapporto di trasformazione $n = \sqrt{\dfrac{Z_p}{Z_s}}$.

Impedenza fra due prese del secondario $Z = Z_b \left(\sqrt{\dfrac{Z_a}{Z_b}} - 1 \right)^2$

Parametri delle valvole.

Corrente anodica $I_a = k \left(- V_g + \dfrac{V_a}{\mu} \right)^{3/2}$.

Fattore di amplificazione $\mu = \dfrac{\Delta V_a}{\Delta V_g}$ (I_a costante).

Resistenza interna $R_a = \dfrac{\Delta V_a}{\Delta I_a}$ (V_g costante).

Pendenza $S = \dfrac{\Delta I_a}{\Delta V_g}$ (V_a costante).

Fattore di conversione della tensione $F_v = V_{a2}/V_{a1}$.

Fattore di conversione della corrente $F_i = \sqrt{F_v^3}$.

Fattore di conversione delle resistenze $F_r = F_v/F_i$.

Fattore di conversione della pendenza $F_s = F_i/F_v$.

Fattore di conversione della potenza $F_p = F_v\, F_i$.

Amplificazione di un triodo $A = \mu \dfrac{R_c}{R_a + R_c}$.

Amplificazione di un pentodo $A = S\,R_e = S \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_e} + \dfrac{1}{R_g}}$.

Alla frequenza limite bassa $f_1 = \dfrac{1}{2\,\pi\,C_c\left(R_g + \dfrac{R_a\,R_e}{R_a + R_e}\right)}$ $A_1 = 0{,}70$ A.

Alla frequenza limite alta $f_2 = \dfrac{1}{2\,\pi\,C_d\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_e} + \dfrac{1}{R_g}}\right)}$ $A_2 = 0{,}70$ A.

Sfasamento alle frequenze basse $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{f_1}{f}$.

Sfasamento alle frequenze alte $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{f}{f_2}$.

Capacità minima condensatore catodico $C_k \geq \dfrac{10}{2\,\pi\,f\,R_k}$.

Capacità minima condensatore schermo $C_s \geq \dfrac{1}{2\,\pi\,f\,R_p}$.
R_p parallelo resistori partitore schermo.

Potenza resa al carico $P_u = \dfrac{V_u^2}{R_e} = \dfrac{(V_{max} - V_{min})\,(I_{max} - I_{min})}{8}$.

Seconda armonica $I_2 = \dfrac{I_{max} - I_{min} - 2\,I_0}{4}$.

Sensibilità di potenza $S_p = \dfrac{P_u}{V_e^2}$.

Capacità di entrata di un triodo $C_g = C_{gk} + C_{ga}\,(1 + A)$.

Capacità di entrata di un pentodo $C_g = C_{gk} + C_{gs} + C_{ga}\,(1 + A)$.

Amplificazione con controreazione $A_r = \dfrac{A}{1 + \beta\,A}$.

Distorsione con controreazione $d_r = \dfrac{d}{1 + \beta\,A}$.

Amplificazione ripetitore catodico $A_r = \dfrac{S\,R_c}{1 + S\,R_c}$.

Resistenza interna ripetitore catodico $R_{ar} = \dfrac{1}{S}$.

Resistenza uscita ripetitore catodico $R_u = \dfrac{R_c}{1 + S\,R_c}$.

Amplificazione $R\,F$ pentodo con circuito oscillatorio $A = S\,\omega\,L\,Q_{eff}$.

Amplificazione $R\,F$ pentodo con trasformatore

resistenza riflessa sul primario $R_2 = \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_2^2} R_2 = \dfrac{\omega^2 M^2}{R_2}$

tensione indotta sul secondario $E_2 = \omega\,M\,I_1$

accoppiamento critico $k = \dfrac{1}{\sqrt{Q_1\,Q_2}}$

corrente nel circuito primario $I_1 = \dfrac{E_1}{Z_1 + \dfrac{\omega^2 M^2}{R_2}}$

corrente nel circuito secondario $I_2 = \dfrac{\omega\,M\,I_1}{Z_2}$.

CIRCUITO CON L IN C. A.

Problema 129. Una bobina ha un'induttanza di 5 mH ed una resistenza di 0,5 Ω. Calcolare l'impedenza offerta alla corrente alternata alle frequenze di 50 e di 1000 Hz.

Soluzione. Alla frequenza di 50 Hz:

$$X = 2\,\pi\,f\,L = 314 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1{,}57\ \Omega$$
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 1{,}57^2} = \sqrt{2{,}71} = 1{,}64\ \Omega$$

Alla frequenza di 1000 Hz:

$$X = 6280 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 31{,}4\ \Omega$$
$$Z = \sqrt{0{,}5^2 + 31{,}4^2} = \sqrt{986{,}15} = 31{,}4\ \Omega$$

Problema 130. In una bobina, con induttanza di 0,4 H e resistenza di 50 Ω, circola una corrente di 2 A alla frequenza di 50 Hz. Qual è il valore della tensione applicata?

Soluzione. La reattanza è:

$$X = 2\,\pi\,f\,L = 314 \cdot 0{,}4 = 125{,}6\ \Omega$$

l'impedenza:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{50^2 + 125{,}6^2} = \sqrt{18\,275} = 135\ \Omega$$

La tensione applicata è:

$$V = Z\,I = 135 \cdot 2 = 270\ \text{V}$$

Problema 131. Una bobina, con resistenza di 20 Ω, è collegata ad una rete a 220 V 50 Hz e richiede una corrente di 4 A. Qual è il valore dell'impedenza della bobina? Qual è il valore della sua induttanza?

Soluzione.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{220}{4} = 55\ \Omega$$

$$Z = 55 = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad 55^2 = R^2 + X^2$$

$$X^2 = 55^2 - 20^2 = 3025 - 400 = 2625\ \Omega$$

$$X = \sqrt{2625} = 51\ \Omega \qquad L = \frac{X}{2\,\pi\,f} = \frac{51}{314} = 0{,}162\ \text{H}$$

Problema 132. Ad una bobina è applicata una tensione continua di 25 V: la corrente che vi circola ha il valore di 25 mA. Con una tensione alternata di 100 V a 50 Hz si ha il passaggio di una corrente di 10 mA. Calcolare l'induttanza della bobina.

Soluzione. La resistenza della bobina è:

$$R = \frac{25}{25 \cdot 10^{-3}} = 1000\ \Omega$$

L'impedenza della bobina è:

$$Z = \frac{100}{10^{-2}} = 10\,000\ \Omega$$

Dalla $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ si ha:

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{10^8 - 10^6} = \sqrt{10^6\,(10^2 - 1)} = 10^3\,\sqrt{99} = 9950\ \Omega$$

$$X = 2\,\pi\,f\,L = 9950 = 6{,}28 \cdot 50 \cdot L \qquad L = \frac{9950}{314} = 31{,}7\ \mathrm{H}$$

Problema 133. Una bobina ha una reattanza di 120 Ω a 50 Hz ed una resistenza di 35 Ω. La tensione del generatore a cui è collegata, è di 200 V a 50 Hz. Calcolare l'induttanza della bobina e l'angolo di sfasamento fra la corrente nel circuito e la tensione applicata. Quale tensione risulta sulla bobina e quale sulla resistenza, supposte collegate in serie?

Soluzione.

$$L = \frac{X}{\omega} = \frac{120}{314} = 0{,}38\ \mathrm{H}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{35^2 + 120^2} = \sqrt{15\,725} = 125\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{200}{125} = 1{,}6\ \mathrm{A}$$

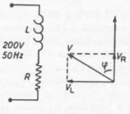


Fig. 102.

La caduta di tensione su L risulta:

$$V_L = 120 \cdot 1{,}6 = 192\ \mathrm{V}$$

la caduta di tensione su R risulta:

$$V_R = 35 \cdot 1{,}6 = 56\ \mathrm{V}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{35}{125} = 0{,}28$$

$$\varphi = 74^\circ\,40'$$

Problema 134. Determinare graficamente le cadute di tensione sull'induttanza V_L e sulla resistenza V_{RB} di una bobina avvalendosi di un resistore di 100 ohm, collegato in serie alla bobina, e di un voltmetro in c.a., con resistenza interna elevatissima.

Collegato il circuito alla rete a 125 V 50 Hz il voltmetro indica una tensione di 35 V sul resistore e di 105 V sulla bobina. Calcolare i valori della induttanza, della resistenza e della impedenza della bobina alla frequenza di rete.

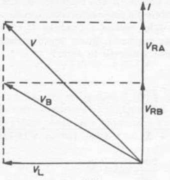


Fig. 103.

Soluzione. Si è costruito il grafico delle cadute di tensione, fig. 103. Nel circuito in serie circola la corrente I che provoca due cadute di tensione in fase con sè stessa, una sulla resistenza della bobina V_{RB} ed una sul resistore aggiunto V_{RA}; sfasata di 90° in anticipo è la tensione prodotta sull'induttanza V_L. Sulla bobina risulta la tensione V_B e su tutto il circuito la tensione di rete V.

La determinazione grafica delle tensioni V_{RB} e V_L può essere effettuata partendo dalla disposizione dei vettori ora esaminata.

Su un'asse, fig. 104, si è tracciato dal punto O, in una determinata scala, il punto A corrispondente alla tensione V_{RA} di 35 V. Centro in O si è tracciato un arco di cerchio con raggio corrispondente a 125 V; centro in A, con raggio 105 V si tracci un altro arco di cerchio che intersechi il primo nel punto B. Da questo si abbassi la perpendicolare all'asse $O\,A$: si determina un altro punto C e quindi si ottengono le lunghezze, ed i valori, di V_{RB} e di V_L, che risultano rispettivamente di 49 e di 93 V.

Il circuito in serie è attraversato da una corrente di intensità tale da produrre sulla resistenza di 100 ohm una caduta di tensione di 35 V.

$$I = V/R = 35/100 = 0{,}35 \text{ A}$$

Quindi:

$$R_B = 49/0{,}35 = 140\ \Omega$$

$$X_L = 93/0{,}35 = 266\ \Omega$$

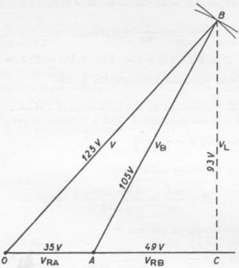


Fig. 104.

$$L = \frac{266}{2\,\pi\,f} = \frac{266}{314} = 0{,}85 \text{ H}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{140^2 + 266^2} = \sqrt{90\,100} = 302\ \Omega$$

Problema 135. Quale valore assume la corrente in un circuito, costituito da una bobina di 0,2 H in serie ad un resistore di 12 Ω, se ad esso si applica una tensione continua di 100 V? Quale valore assume la corrente se ad esso si applica una tensione di 100 V a 50 Hz? Calcolare la potenza dissipata nei due casi.

Soluzione. Con la tensione continua:

$$I = \frac{100}{12} = 8{,}35 \text{ A} \qquad P = V\,I = 100 \cdot 8{,}35 = 835 \text{ W}$$

Con la tensione alternata:

$$X = 6{,}28 \cdot 50 \cdot 0{,}2 = 62{,}8\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{144 + 3950} = 64\ \Omega$$

$$I = \frac{100}{64} = 1{,}56 \text{ A}$$

$$P = R I^2 = 12 \cdot 2{,}433 = 29{,}19 \text{ W}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{12}{64} = 0{,}188$$

$$P = V I \cos \varphi = 100 \cdot 1{,}56 \cdot 0{,}188 = 29{,}3 \text{ W}$$

valori della potenza dissipata praticamente uguali.

Problema 136. Una bobina ha una induttanza di 1 H ed un valore di $Q = 10$ a 1000 Hz. Qual è la sua resistenza? Qual è il valore di $\cos \varphi$? Quale errore si commette ritenendo $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{1}{\cos \varphi}$?

Soluzione. La resistenza della bobina è:

$$R = \frac{\omega L}{Q} = \frac{6{,}28 \cdot 1000 \cdot 1}{10} = 628 \ \Omega$$

Il valore del fattore di potenza è:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{628}{\sqrt{628^2 + 6280^2}} = \frac{628}{6311} = 0{,}099$$

Ponendo i valori noti in:

$$Q = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\cos \varphi} \qquad Q = \frac{1}{0{,}099} = 10{,}1$$

l'errore relativo che si commette scrivendo l'uguaglianza suddetta è:

$$e_r = \frac{\text{errore}}{\text{valore esatto}} = \frac{10{,}1 - 10}{10} = \frac{0{,}1}{10} = 0{,}01$$

e l'errore percentuale:

$$e_r \cdot 100 = 1\%$$

Problema 137. La bobina A ha un'induttanza di 0,1 H ed una resistenza di 50 Ω; la bobina B ha un'induttanza di 0,2 H e 60 Ω. Le due bobine sono collegate in serie, senza che i loro campi magnetici si influenzino. Quali valori debbono avere l'induttanza e la resistenza di una bobina C che richieda dalla rete la stessa corrente delle due bobine suddette? Quali valori deve avere questa ultima bobina se le bobine A e B sono collegate in parallelo?

Soluzione. La bobina C, equivalente ad A e B collegate in serie, deve avere un'induttanza ed una resistenza rispettivamente somme di quelle delle due bobine:

$$L = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \text{ H} \qquad R = 50 + 60 = 110 \ \Omega$$

La bobina C, equivalente ad A e B collegate in parallelo, deve avere:

$$L = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}1 + 0{,}2} = 0{,}066 \text{ H} \qquad R = \frac{50 \cdot 60}{50 + 60} = 27{,}3 \ \Omega$$

Problema 138. Mantenendo costante l'induttanza di una bobina la si riavvolga con un conduttore più sottile in modo che la sua resistenza risulti 1,3 volte maggiore della bobina originale. Quale variazione si verifica nel valore di Q?

Soluzione. Per la bobina originale:

$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

per la bobina riavvolta:

$$Q = \frac{\omega L}{1{,}3 \, R}$$

Il secondo valore di Q risulta 1,3 volte minore che nel primo caso.

Problema 139. Se si aumentano le dimensioni di una bobina, in un certo modo, si ottiene un aumento della sua induttanza secondo un fattore di 2 e della sua resistenza secondo un fattore di 1,5. Come si sarà alterato il valore di Q della bobina?

Soluzione. Il fattore di merito originale della bobina è:

$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

Il fattore di merito risultante dagli aumenti delle dimensioni è:

$$Q_1 = \frac{2 \, \omega L}{1{,}5 \, R} = \frac{2}{1{,}5} \, Q = 1{,}33 \, Q$$

Il nuovo fattore di merito risulta 1,33 volte maggiore dell'originale.

Problema 140. Una bobina di 200 μH ha un valore di $Q = 120$ alla frequenza di 800 kHz. Quale valore avrà il Q della stessa bobina a 1250 kHz se la sua resistenza risulta a questa frequenza di valore doppio di quella a 800 kHz?

Soluzione.

$$R = \frac{\omega L}{Q} = \frac{6{,}28 \cdot 8 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{120} = \frac{1004}{120} = 8{,}4 \ \Omega$$

A 1250 kHz:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}25 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{16{,}8} = \frac{1570}{16{,}8} = 94$$

Problema 141. In un circuito in serie, costituito da una bobina, con reattanza di 46 Ω ad una data frequenza, e da un resistore di 16 Ω, si vuole ottenere un angolo di sfasamento fra V ed I di 85°. In che modo va alterato il circuito? Quale sarà la variazione da introdurvi per ottenere un angolo di sfasamento di 51°?

Soluzione. Dal valore di tg φ, cioè di Q, del circuito si ricava il valore della resistenza che ne deve far parte.

Per 85°

$$\operatorname{tg} \varphi = 11{,}43 = \frac{\omega L}{R} = \frac{46}{R}$$

$$R = \frac{46}{11{,}43} = 3{,}14\ \Omega$$

Per ottenere questo angolo di sfasamento occorre ridurre il valore della resistenza in serie alla bobina da 16 a 3,14 Ω.

Per 51°

$$\operatorname{tg} \varphi = 1{,}23 = \frac{46}{R}$$

$$R = \frac{46}{1{,}23} = 37{,}5\ \Omega$$

Per realizzare questo sfasamento la resistenza in serie va aumentata da 16 a 37,5 Ω.

Problema 142. Quale valore hanno le perdite di una bobina, con induttanza di 500 μH e fattore di merito $Q = 120$, alla frequenza di 500 kHz, se esse sono considerate come una resistenza in parallelo alla bobina? Quale valore hanno le perdite se sono considerate come una resistenza in serie?

Soluzione. Nel caso di resistenza in parallelo alla bobina:

$$Q = \frac{R_p}{\omega L}$$

da cui:

$$R_p = Q\, \omega L = 120 \cdot 6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 188\ 000\ \Omega$$

Nel caso della resistenza in serie:

$$R = \frac{\omega L}{Q} = \frac{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{120} = \frac{1560}{120} = 13\ \Omega$$

Problema 143. Tracciare i grafici delle reattanze di una bobina di 200 μH e di un condensatore di 500 pF in funzione della frequenza, compresa fra 100 e 2000 kHz.

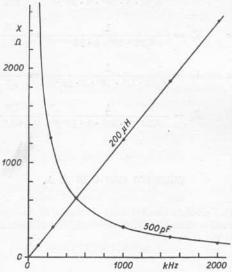


Fig. 105.

Soluzione. Per tracciare i grafici si debbono anzitutto determinare i valori delle reattanze a varie frequenze.

Per la bobina:

a 100 kHz	$X_L = 6{,}28 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 125{,}6\ \Omega$
250 kHz	$X_L = 6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 314\ \Omega$
500 kHz	$X_L = 6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 628\ \Omega$
1000 kHz	$X_L = 6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1256\ \Omega$
1500 kHz	$X_L = 6{,}28 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1874\ \Omega$
2000 kHz	$X_L = 6{,}28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 2512\ \Omega$

Per il condensatore:

a 100 kHz $X_C = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \dfrac{10^5}{31{,}4} = 3184\ \Omega$

250 kHz $X_C = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \dfrac{10^5}{78{,}5} = 1273\ \Omega$

500 kHz $X_C = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \dfrac{10^5}{157} = 636\ \Omega$

1000 kHz $X_C = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \dfrac{10^4}{31{,}4} = 318{,}4\ \Omega$

1500 kHz $X_C = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 1{,}5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \dfrac{10^4}{47} = 212\ \Omega$

2000 kHz $X_C = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \dfrac{10^4}{62{,}8} = 159\ \Omega$

CIRCUITO CON C IN C. A.

Problema 144. Calcolare i valori della reattanza di un condensatore di 1 μF a 50, 100, 500, 2000 e 6000 Hz e delle correnti che vi circolano se la tensione applicata è di 50 V.

Soluzione.

$X = \dfrac{1}{2\pi f C} = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{10^6}{314} = 3180\ \Omega \qquad I = \dfrac{50}{3180} = 15{,}7\ \text{mA}$

$X = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{10^6}{628} = 1590\ \Omega \qquad I = \dfrac{50}{1590} = 31{,}4\ \text{mA}$

$X = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{10^6}{3140} = 318\ \Omega \qquad I = \dfrac{50}{318} = 157\ \text{mA}$

$X = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 2000 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{10^6}{12\,560} = 79{,}5\ \Omega \qquad I = \dfrac{50}{79{,}5} = 630\ \text{mA}$

$X = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 6000 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{10^6}{37\,680} = 26{,}5\ \Omega \qquad I = \dfrac{50}{26{,}5} = 1{,}89\ \text{A}$

Problema 145. Quale valore della tensione occorre applicare ad un circuito in serie, costituito da un condensatore di 0,01 μF ed una resistenza di 3500 Ω, per far circolare una corrente dell'intensità di 2,7 mA alla frequenza di 1250 Hz?

Soluzione.

$$X = \frac{1}{2\,\pi\, f\, C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 1{,}25 \cdot 10^3 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^5}{7{,}85} = 12\,750\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{3500^2 + 12\,750^2} = \sqrt{3{,}5^2 \cdot 10^6 + 12{,}75^2 \cdot 10^6} =$$

$$= 10^3\sqrt{12{,}25 + 162{,}5} = 13\,200\ \Omega$$

$$V = Z\,I = 13{,}2 \cdot 10^3 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{-3} = 35{,}6\ \text{V}$$

Problema 146. Calcolare i valori delle reattanze e delle tensioni applicate ad un condensatore di 0,05 μF alle frequenze di 1200 e 7000 Hz se le correnti relative a queste hanno intensità di 0,012 e 0,150 A?

Soluzione.

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^5}{37{,}7} = 2650\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^5}{220} = 455\ \Omega$$

$$V = X\,I = 2650 \cdot 0{,}012 = 31{,}8\ \text{V}$$

$$V = X\,I = 455 \cdot 0{,}15 = 68{,}25\ \text{V}$$

Problema 147. Qual è il valore della tensione massima a cui risulta assoggettato un condensatore con $C = 0{,}03\ \mu$F, se attraverso ad esso circola una corrente con intensità di 10 mA a 1000 Hz?

Soluzione.

$$V_{eff} = \frac{I}{\omega\, C} = \frac{0{,}01}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-9}} = 531\ \text{V}$$

$$V_{max} = 1{,}41 \cdot 531 = 751\ \text{V}$$

Problema 148. Qual è il valore dell'impedenza a 50 Hz di un circuito costituito da un condensatore di 10 μF in serie ad una resistenza di 10 Ω? Quale è la potenza dissipata nel circuito se la tensione applicata è di 100 V? Calcolare la potenza anche a mezzo del fattore di potenza.

Soluzione.

$$X = \frac{1}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{3140} = 318\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{100 + 101\,124} = 319\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{319} = 0{,}313\ \mathrm{A}$$

$$P = R\,I^2 = 10 \cdot 0{,}313^2 = 0{,}97\ \mathrm{W}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{10}{319} = 0{,}03$$

$$P = V\,I\cos\varphi = 100 \cdot 0{,}313 \cdot 0{,}03 = 0{,}94\ \mathrm{W}$$

Problema 149. Calcolare il valore dell'impedenza di un circuito in parallelo costituito da un condensatore di 0,1 μF ed una resistenza di 10 000 Ω. Applicando al circuito una tensione di 20 V e 1000 Hz quale intensità di corrente vi circola?

Soluzione.

$$X = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^3}{0{,}628} = 1590\ \Omega$$

$$Z = \frac{R\,X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{10^4 \cdot 1590}{\sqrt{100 \cdot 10^6 + 2{,}54 \cdot 10^6}} = \frac{10^4 \cdot 1590}{10^3\sqrt{100 + 2{,}54}} =$$

$$= \frac{15\,900}{10{,}10} = 1574\ \Omega$$

$$I = \frac{20}{1574} = 12{,}7\ \mathrm{mA}$$

Problema 150. Quale valore ha la capacità di un condensatore che, collegato in serie ad una resistenza di 20 Ω, lascia passare una corrente di 0,2 A se sottoposto ad una tensione di 125 V a 50 Hz?

Soluzione.

$$Z = \frac{125}{0{,}2} = 625\ \Omega$$

$$X_C = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{625^2 - 20^2} = 625\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{2\,\pi\,f\,X_C} = \frac{1}{314 \cdot 625} = \frac{1}{196\,000} = \frac{1}{0{,}196} \cdot 10^{-6} = 5{,}2\ \mu\text{F}$$

Problema 151. La tg ϑ di un condensatore di 1000 pF a 875 kHz ha un valore di 0,001: quali saranno i valori corrispondenti della resistenza in serie o in parallelo?

Soluzione. La pulsazione è $\omega = 2\,\pi\,f = 6{,}28 \cdot 8{,}75 \cdot 10^5 = 55 \cdot 10^5$.
Da $\operatorname{tg}\vartheta = \omega\,R_s\,C$:

$$R_s = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\omega\,C} = \frac{10^{-3}}{5{,}5 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = \frac{10}{5{,}5} = 1{,}82\ \Omega$$

Da $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{1}{\omega\,R_p\,C}$:

$$R_p = \frac{1}{\omega\,C\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{1}{5{,}5 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}} = \frac{10^7}{5{,}5} = 182\,000\ \Omega$$

Problema 152. Un condensatore, con dielettrico di mica, ha una capacità di 250 pF. Considerandone il circuito equivalente in parallelo quale valore assume la resistenza, alla frequenza di 1000 kHz, se l'angolo di perdita della mica è $\operatorname{tg}\vartheta = 1{,}7 \cdot 10^{-4}$?

Soluzione. La resistenza equivalente alle perdite in parallelo al condensatore:

$$R_p = \frac{1}{\omega\,C\cos\varphi}$$

Il coseno dell'angolo di sfasamento φ fra la tensione e la corrente ha lo stesso valore del seno dell'angolo complementare ϑ. Poichè questo risulta molto piccolo si ha $\operatorname{sen}\vartheta = \operatorname{tg}\vartheta$ quindi:

$$R_p = \frac{1}{\omega\,C\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-4}} = \frac{10^8}{26{,}7} = 3{,}75\ \text{M}\Omega$$

Problema 153. Un condensatore a mica di 1000 pF ha un fattore di potenza di 0,001. Quali sono le resistenze equivalenti in serie o in parallelo alle frequenze di 1000 Hz, di 100 kHz e di 10 MHz?

Soluzione. Dalla $\operatorname{tg}\vartheta = R_s\,\omega\,C$:

a 1000 Hz $$R_s = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\omega\,C} = \frac{10^{-3}}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^3}{6{,}28} = 159\ \Omega$$

100 kHz $\quad R_s = \dfrac{10^{-3}}{6{,}28 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = \dfrac{10}{6{,}28} = 1{,}59\ \Omega$

10 MHz $\quad R_s = \dfrac{10^{-3}}{6{,}28 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = \dfrac{0{,}1}{6{,}28} = 0{,}0159\ \Omega$

Dalla $\operatorname{tg}\vartheta = \dfrac{1}{R_p\,\omega\,C}$:

a 1000 Hz $\quad R_p = \dfrac{1}{\omega\,C\operatorname{tg}\vartheta} = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}} = \dfrac{10^9}{6{,}28} = 159\ \text{M}\Omega$

a 100 kHz $\quad R_p = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}} = \dfrac{10^7}{6{,}28} = 1{,}59\ \text{M}\Omega$

10 MHz $\quad R_p = \dfrac{1}{6{,}28 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}} = \dfrac{10^5}{6{,}28} = 15\,900\ \Omega$

Problema 154. Un generatore è collegato a due lamine metalliche A e B, fig. 106 *a*. Se il valore della capacità fra le due lamine è di 10 pF e quello della resistenza M di 0,5 MΩ quale tensione esiste sulla lamina B se il generatore

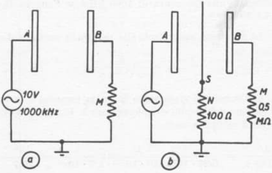


Fig. 106.

ha una f.e.m. $V_g = 10$ V ed una frequenza di 1000 kHz? Se si inserisce fra le due lamine suddette una lamina S, sottilissima ed equidistante fra esse, figura 106 *b*, per cui la sua capacità risulti di 20 pF sia con A che con B, quale sarà la tensione presente su B se S è collegata a massa attraverso una resistenza N di 100 Ω? Se la frequenza del generatore è aumentata a 30 MHz quale tensione si ha su B malgrado la schermatura di S?

Soluzione. La rettanza della capacità AB è:

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^5}{6{,}28} = 15\,920\ \Omega$$

L'impedenza di AB ed M:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{0{,}25 \cdot 10^{12} + 2{,}53 \cdot 10^8} = 5 \cdot 10^5\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10}{5 \cdot 10^5} = 0{,}2 \cdot 10^{-4} = 20\ \mu\text{A}$$

Sulla lamina B esiste praticamente la medesima tensione di A, cioè quella del generatore.

$$V_B = 5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-5} = 10\ \text{V}$$

Introdotta la lamina S risultano due capacità in serie fra A e B. La reattanza della capacità AS ha un valore metà di quella di AB, cioè di 7960 Ω; l'impedenza di AS ed N:

$$Z = \sqrt{10^4 + 63 \cdot 10^6} = 7960\ \Omega$$

e la tensione su N è praticamente:

$$V = \frac{100}{7960}\ V_g = \frac{1}{80}\ 10 = 0{,}125\ \text{V}$$

Con una simile tensione presente fra S e B si può ritenere che la medesima tensione esista su B rispetto massa, dato l'elevato valore della resistenza M.

Alla frequenza di 30 MHz la reattanza di AS è:

$$X = \frac{1}{6{,}28 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^4}{37{,}6} = 265\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{10^4 + 7 \cdot 10^4} = 283\ \Omega$$

$$I = \frac{10}{283} = 0{,}035\ \text{A} \quad \text{e} \quad V_S = R\,I = 100 \cdot 0{,}035 = 3{,}5\ \text{V}$$

La stessa tensione sarà presente sulla lamina B, malgrado la schermatura di S, a causa della resistenza di contatto a massa, rappresentata da N.

CIRCUITO CON L, C, R IN C. A.

Problema 155. Ad una determinata frequenza quali valori assumerà la reattanza o l'impedenza dalle seguenti combinazioni in serie: una bobina (con $X_L = 3$ o $4\ \Omega$) ed un condensatore (con $X_C = 3$ o $4\ \Omega$) e dalle stesse con una $R = 3\ \Omega$?

Soluzione.

$X_L 3 \quad X_C 3 \quad X = 3 - 3 = 0 \qquad R 3 \quad X_L 3 \quad X_C 3 \quad Z = \sqrt{3^2 + (3 - 3)^2} = 3$

$X_L 3 \quad X_C 4 \quad X = 3 - 4 = -1 \qquad R 3 \quad X_L 3 \quad X_C 4 \quad Z = \sqrt{3^2 + (3 - 4)^2} = 3{,}16$

$X_L 4 \quad X_C 3 \quad X = 4 - 3 = 1 \qquad R 3 \quad X_L 4 \quad X_C 3 \quad Z = \sqrt{3^2 + (4 - 3)^2} = 3{,}16$

$X_L 4 \quad X_C 4 \quad X = 4 - 4 = 0 \qquad R 3 \quad X_L 4 \quad X_C 4 \quad Z = \sqrt{3^2 + (4 - 4)^2} = 3$

Problema 156. Una bobina con induttanza di 0,05 H e 20 Ω è collegata, in serie con un condensatore con capacità di 30 μF, ad una rete a 150 V 45 Hz. Qual è la corrente nel circuito? Quale capacità renderebbe massima questa corrente? Qual è il valore di questa corrente massima?

Soluzione.

$$X_L = 2\,\pi\,f\,L = 283 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 14{,}13\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\,\pi\,f\,C} = \frac{1}{283 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^5}{848} = 118\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{20^2 + (14{,}13 - 118)^2} = \sqrt{11\,050} = 105$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{150}{105} = 1{,}43\ \text{A}$$

Questa corrente raggiunge il valore massimo quando si porta il circuito a risonanza a 45 Hz, cioè quando C ha una capacità tale che la sua reattanza risulta di 14,13 Ω:

$$C = \frac{1}{283 \cdot 14{,}13} = \frac{1}{3998} = 251\ \mu\text{F}$$

In tal caso la corrente risulta limitata solo dalla resistenza del circuito raggiungendo il valore massimo:

$$I = \frac{150}{20} = 7{,}5\ \text{A}$$

Problema 157. Una bobina, con induttanza di 0,3 H e resistenza di 2 Ω, è collegata in serie ad un condensatore con capacità di 10 μF. Applicando a questo circuito una tensione di 125 V a 45 Hz qual è il valore della corrente che vi circola? Qual è la tensione risultante su ciascuno dei componenti del circuito?

Soluzione.

$$X_L = 2\,\pi\, f\, L = 6{,}28 \cdot 45 \cdot 0{,}3 = 85\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\,\pi\, f\, C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 45 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^5}{283} = 355\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{4 + (85 - 355)^2} = \sqrt{4 + 73\,000} = 270\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{125}{270} = 0{,}463\ \text{A}$$

$$V_L = X_L\, I = 85 \cdot 0{,}463 = 39{,}3\ \text{V}$$

$$V_C = X_C\, I = 355 \cdot 0{,}463 = 164{,}3\ \text{V}$$

Problema 158. In un circuito in serie costituito da una bobina, con $X_L = 452\ \Omega$, un condensatore, con $X_C = 430\ \Omega$, ed una resistenza, $R = 10\ \Omega$, si ha una corrente $I = 0{,}32$ A. Quali sono le tensioni risultanti sui vari elementi del circuito e sulle loro possibili combinazioni? Qual è la tensione applicata al circuito?

Soluzione.

$$V_R = 0{,}32 \cdot 10 = 3{,}2\ \text{V}$$

$$V_L = 0{,}32 \cdot 452 = 144{,}5\ \text{V}$$

$$V_C = 0{,}32 \cdot 430 = 137{,}5\ \text{V}$$

Sulle possibili combinazioni degli elementi del circuito:

$$V_{RC} = I\, Z = I\,\sqrt{R^2 + X_C^2} = 0{,}32 \cdot 430 = 138\ \text{V}$$

$$V_{RL} = 0{,}32 \cdot 452 = 145\ \text{V}$$

$$V_{LC} = I\,(X_L - X_C) = 0{,}32 \cdot 22 = 7\ \text{V}$$

La tensione totale applicata al circuito:

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_{LC}^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 7^2} = 7{,}7\ \text{V}$$

Problema 159. Quale valore deve avere la capacità di un condensatore collegato in serie ad una bobina se cortocircuitato oppure no la reattanza del circuito risulta sempre di $\pm$ 100 ohm? Il generatore a cui questo è collegato presenta fra i morsetti una tensione di 10 V alla frequenza di 100 Hz.

Soluzione. Il valore della reattanza risultante dalla serie dei due elementi del circuito è dato dalla differenza fra i valori delle rispettive reattanze:

$$\pm X = X_L - X_C$$

e per quanto specificato $X = X_L$ con C cortocircuitato:

$$-X_C = X_L + X = 100 + 100 = 200\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^2} = 17{,}3\ \mu\text{F}$$

Problema 160. Alla frequenza del generatore le reattanze di un condensatore e di una bobina collegate in parallelo risultano con i valori indicati in fig. 107. A quale valore va regolato R per ottenere un valore di $\cos\varphi = 0{,}5$?

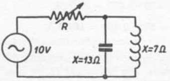


Fig. 107.

Soluzione. Con R escluso le correnti nella bobina e nel condensatore hanno le intensità:

$$I_L = 10/7 = 1{,}43\ \text{A}$$
$$I_C = 10/13 = 0{,}77\ \text{A}$$

La corrente fornita dal generatore risulta:

$$I = 1{,}43 - 0{,}77 = 0{,}66\ \text{A}$$

Corrente che circola nella sola bobina quindi questa presenta una reattanza:

$$X = 10/0{,}66 = 15{,}1\ \Omega$$

Il valore di $\cos\varphi = 0{,}5$ corrisponde ad un angolo di $\varphi = 60°$. La tangente di questo angolo ha il valore 1,732, quindi:

$$\text{tg}\,\varphi = 1{,}732 = \frac{X}{R} = \frac{15{,}1}{R} \qquad \text{da cui } R = \frac{15{,}1}{1{,}732} = 8{,}75\ \Omega$$

Regolando R a questo valore si ottiene un circuito RL con fattore di potenza di 0,5.

Problema 161. Un circuito è costituito da due condensatori, due bobine ed una resistenza in serie e ad esso è applicata una tensione di 125 V. Le reattanze relative ai suddetti componenti, alla frequenza di rete, sono $X_C = 8$ e $12\ \Omega$, $X_L = 16$ e $9\ \Omega$, $R = 5\ \Omega$. Qual è la corrente nel circuito? Quale tensione risulta su ogni componente? Qual è il valore del fattore di potenza?

Soluzione.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{5^2 + [(16 + 9) - (12 + 8)]^2} = 7{,}1\ \Omega$$

$$I = V/Z = 125/7{,}1 = 17{,}6\ \text{A} = 17{,}6\ \text{A}$$

$$V_{C1} = X_C\, I = 8 \cdot 17{,}6 = 140{,}8\ \text{V}$$

$$V_{C2} = 12 \cdot 17{,}6 = 211{,}2\ \text{V}$$

$$V_{L1} = 16 \cdot 17{,}6 = 281{,}6\ \text{V}$$

$$V_{L2} = 9 \cdot 17{,}6 = 158{,}4\ \text{V}$$

$$V_R = 5 \cdot 17{,}6 = 88\ \text{V}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{5}{7{,}1} = 0{,}71$$

Problema 162. Ad un circuito oscillatorio in serie è applicata una tensione di 100 V a 1000 Hz. La capacità è regolata sino ad ottenere la risonanza, con una corrente massima di 200 mA. In queste condizioni sul condensatore risulta una tensione di 150 V. Calcolare i valori di L, di C ed R_s.

Soluzione. A risonanza la corrente nel circuito è limitata solo da R_s:

$$R_s = \frac{V}{I} = \frac{100}{0{,}2} = 500\ \Omega$$

La corrente nel condensatore provoca la differenza di potenziale di 150 V:

$$I = \frac{V}{X} = \omega\, C\, V$$

da cui:

$$C = \frac{I}{\omega\, V} = \frac{0{,}2}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^2} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-5}}{9{,}4} =$$

$$= 0{,}0212 \cdot 10^{-5}\ \text{F} = 0{,}212\ \mu\text{F}$$

Una differenza di potenziale identica risulta sulla bobina:

$$I = \frac{V}{X} = \frac{V}{\omega\, l}$$

$$L = \frac{V}{\omega I} = \frac{150}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2} = \frac{150 \cdot 10^{-3}}{1{,}25} = 120 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} = 120\ \mathrm{mH}$$

Problema 163. Quale valore assume, alla frequenza di risonanza di 900 kHz, l'impedenza di un circuito costituito da una bobina di 200 μH, con resistenza di 3,5 Ω, collegata in parallelo ad un condensatore di capacità di valore adatto alla risonanza? Se si raddoppia il valore della resistenza della bobina che valore assume l'impedenza?

Soluzione. La capacità necessaria per l'accordo a 900 kHz è:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 9 \cdot 10^5)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{39{,}4 \cdot 81 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \frac{1}{6382 \cdot 10^6} = 0{,}000157 \cdot 10^{-6} = 157 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}$$

Il valore dell'impedenza del circuito oscillatorio in parallelo è:

$$Z = \frac{L}{C R} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1{,}57 \cdot 10^{-10} \cdot 3{,}5} = \frac{2 \cdot 10^6}{5{,}49} = 365\,000\ \Omega$$

Raddoppiando il valore della resistenza della bobina l'impedenza dinamica si riduce a metà:

$$Z = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1{,}57 \cdot 10^{-10} \cdot 7} = \frac{2 \cdot 10^6}{11} = 182\,500\ \Omega$$

Problema 164. Alla frequenza di risonanza, da determinare, qual è il valore della corrente che un generatore eroga su un circuito in parallelo costituito da una bobina, con induttanza di 1 H e resistenza di 130 Ω, ed un condensatore di 10 000 pF, se la tensione ad esso applicata è di 100 V? Qual è la corrente nella bobina?

Soluzione. La frequenza di risonanza è:

$$f = \frac{1}{6{,}28\sqrt{10^{-8}}} = \frac{10^4}{6{,}28} = 1592\ \mathrm{Hz}$$

L'impedenza dinamica del circuito è:

$$Z = \frac{L}{C R} = \frac{1}{10^{-8} \cdot 130} = \frac{10^8}{130} = 770\,000\ \Omega$$

La corrente fornita dal generatore al circuito è:

$$I = V/Z = 100/7{,}7 \cdot 10^5 = 13 \cdot 10^{-5} = 0{,}13 \text{ mA}$$

La bobina ha un coefficiente di sovratensione:

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{6{,}28 \cdot 1{,}59 \cdot 10^3 \cdot 1}{130} = 76{,}8$$

$$I_L = I\,Q = 76{,}8 \cdot 0{,}13 \cdot 10^{-3} = 9{,}98 \cdot 10^{-3} = 9{,}98 \text{ mA}$$

FREQUENZA E LARGHEZZA DI BANDA

Problema 165. Quali frequenze corrispondono alle lunghezze d'onda di m 1,75 - 52 - 225 e 470? Quali lunghezze d'onda corrispondono alle frequenze di 350, 467, 1250 kHz e 12, 37, 206 MHz?

Soluzione.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{300\,000}{1{,}75} = 171\,420 \text{ kHz} = 171{,}4 \text{ MHz}$$

$$= \frac{300\,000}{52} = 5780 \text{ kHz} = 5{,}78 \text{ MHz}$$

$$= \frac{300\,000}{225} = 1345 \text{ kHz} = 1{,}34 \text{ MHz}$$

$$= \frac{300\,000}{470} = 639 \text{ kHz}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{300\,000}{350} = 860 \text{ m}$$

$$= \frac{300\,000}{467} = 642 \text{ m}$$

$$= \frac{300\,000}{1250} = 240 \text{ m}$$

$$= \frac{300}{12} = 25 \text{ m}$$

$$= \frac{300}{37} = 8{,}12 \text{ m}$$

$$= \frac{300}{206} = 1{,}46 \text{ m}$$

Problema 166. Su quali lunghezze d'onda è accordabile un circuito oscillatorio costituito da una bobina con $L = 200\ \mu\text{H}$ e un condensatore C commutabile fra quattro di 50, 75, 125 e 300 pF?

Soluzione. La formula per il calcolo della lunghezza d'onda è:

$$\lambda = 1885\ \sqrt{L\,C} \text{ m}$$

in cui L va indicata in μH e C in μF.

Con 50 pF:

$$\lambda = 1885\ \sqrt{200 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 1885\ \sqrt{10^{-2}} = 1885 \cdot 10^{-1} = 188{,}5 \text{ m}$$

con 75 pF:

$$\lambda = 1885\ \sqrt{200 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-5}} = 1885\ \sqrt{0{,}015} = 1885 \cdot 0{,}125 = 232 \text{ m}$$

con 150 pF:

$$\lambda = 1885\ \sqrt{200 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4}} = 1885\ \sqrt{0{,}025} = 1885 \cdot 0{,}158 = 299 \text{ m}$$

con 300 pF:

$$\lambda = 1885\ \sqrt{200 \cdot 3{,}10^{-4}} = 1885\ \sqrt{0{,}06} = 1885 \cdot 0{,}245 = 462 \text{ m}$$

Problema 167. Qual è la frequenza di risonanza di un circuito costituito da un condensatore di 105 pF in serie ad una bobina di 212 μH ed una resistenza di 3,5 Ω? A 1000 kHz qual è il valore dell'impedenza del circuito?

Soluzione. La frequenza di risonanza del circuito è:

$$f = \frac{1}{6{,}28\ \sqrt{L\,C}} = \frac{1}{6{,}28\ \sqrt{212 \cdot 10^{-6} \cdot 105 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^9}{6{,}28\ \sqrt{212 \cdot 105}} =$$

$$= \frac{10^9}{6{,}28 \cdot 149} = 1065 \text{ kHz}$$

Le reattanze della bobina e della capacità a 1000 kHz sono:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 212 \cdot 10^{-6} = 1330\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 105 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{660} = 1515\ \Omega$$

ed il valore dell'impedenza:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{3{,}5^2 + (1330 - 1515)^2} = \sqrt{34\,237} = 185\ \Omega$$

Problema 168. Applicando ad un circuito oscillatorio in serie una tensione di 1 V, alla stessa frequenza di risonanza del circuito, qual è il valore della corrente che vi circola se la resistenza ha un valore di 10 Ω, il condensatore una capacità di 300 pF e la bobina un'induttanza di 200 μH? Qual è il valore della frequenza di risonanza? Qual è la tensione ai morsetti del condensatore?

Soluzione. A risonanza la corrente è limitata solo dalla resistenza del circuito oscillatorio:

$$I = 1/10 = 0{,}1\ \text{A}$$

La frequenza di risonanza è:

$$f = \frac{1}{6{,}28\sqrt{200 \cdot 10^{-6} \cdot 300 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^7}{6{,}28\sqrt{6}} = \frac{10^7}{15{,}38} = 650\,000 = 650\ \text{kHz}$$

A questa frequenza la reattanza del condensatore assume il valore:

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 650 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^5}{122{,}4} = 816\ \Omega$$

e la tensione presente fra i suoi morsetti:

$$V_C = I\,X_C = 0{,}1 \cdot 816 = 81{,}6\ \text{V}$$

Problema 169. Una bobina, con induttanza di 10 μH e fattore di merito $Q = 160$, è collegata in serie ad un condensatore di 15 pF. Se la tensione indotta nella bobina, alla frequenza di risonanza, è di 0,1 V quale tensione risulta sul condensatore? Se questa tensione deve risultare di 10 V quale valore dovrà essere indotto nella bobina?

Soluzione. La frequenza di risonanza è:

$$f = \frac{1}{6{,}28\sqrt{10^{-5} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-11}}} = \frac{10^8}{6{,}28\sqrt{1{,}5}} = \frac{10^8}{7{,}6} = 13{,}15\ \text{MHz}$$

La resistenza del circuito è:

$$R = \frac{\omega L}{Q} = \frac{6{,}28 \cdot 13{,}15 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{160} = \frac{826}{160} = 5{,}1\ \Omega$$

La corrente nel circuito è:

$$I = V/R = 0{,}1/5{,}1 = 0{,}019 \text{ A}$$

La reattanza del condensatore alla frequenza di risonanza è:

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 13{,}15 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{1238} = 807 \ \Omega$$

La tensione presente sul condensatore è:

$$V = X\,I = 807 \cdot 0{,}019 = 15{,}3 \text{ V}$$

Se la tensione sul condensatore deve risultare di 10 V la corrente nel circuito deve risultare di:

$$I = V/X = 10/807 = 0{,}012 \text{ A}$$

quindi la tensione indotta:

$$V = R\,I = 5{,}1 \cdot 0{,}012 = 0{,}061 \text{ V}$$

Problema 170. Per ottenere una larghezza della banda passante di 9000 Hz costante alle frequenze di 100 kHz, 1 MHz e 10 MHz quali valori di Q dovranno avere tre circuiti oscillatori accordati alle frequenze suddette? Discutere i risultati.

Soluzione. Per la frequenza di 100 kHz:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{10^5}{9 \cdot 10^3} = 11{,}1$$

Per la frequenza di 1 MHz:

$$Q = \frac{10^6}{9 \cdot 10^3} = 111$$

Per la frequenza di 10 MHz:

$$Q = \frac{10^7}{9 \cdot 10^3} = 1111$$

Un circuito, accordato ad 1 MHz, avente $Q = 111$ può essere realizzato con componenti normali. Un circuito, accordato a 100 kHz e realizzato con componenti normali, risulta con un valore di Q molto più elevato di quello richiesto dal problema, cioè $Q = 11{,}1$, e dovrà essere peggiorato inserendo, ad es., una resistenza in parallelo al circuito o in serie alla bobina. Un circuito che, accordato alla frequenza di 10 MHz, presenti un $Q = 1111$ è irrealizzabile praticamente.

Problema 171. Qual è la larghezza della banda passante di un circuito oscillatorio, accordato alla frequenza di 375 kHz, di cui $L = 200$ μH ed $R_s = 10\ \Omega$? Quale sarà la larghezza della banda passante se si rende $R_s = 20\ \Omega$?

Soluzione. Con $R_s = 10\ \Omega$ si ha un fattore di merito del circuito:

$$Q = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{6{,}28 \cdot 3{,}75 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{10} = \frac{471}{10} = 47{,}1$$

e dalla:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

si ottiene:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{3{,}75 \cdot 10^5}{47} = 7961 \text{ Hz}$$

Con $R_s = 20\ \Omega$ si ha:

$$Q = \frac{471}{20} = 23{,}55 \quad \text{e} \quad \Delta f = \frac{3{,}75 \cdot 10^5}{23{,}5} = 15\,923 \text{ Hz}$$

Problema 172. Un circuito oscillatorio, accordato alla frequenza di 500 kHz, ha una banda passante di 3 kHz. Se la capacità di accordo è $C = 0{,}00038$ μF quale valore deve avere la resistenza serie del circuito?

Soluzione. Il fattore di merito del circuito è:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{5 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^3} = 166$$

A risonanza $X_L = X_C$ quindi:

$$R_s = \frac{\omega L}{Q} = \frac{1}{\omega C Q} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 166} = \frac{10^5}{19\,800} = 5{,}06\ \Omega$$

Problema 173. Un circuito oscillatorio in parallelo è costituito da una bobina con induttanza L, un condensatore di 100 pF ed un resistore di 1 MΩ. Qual è la larghezza di banda presentata da questo circuito?

Soluzione. Nella formula:

$$\Delta f = \frac{f}{Q}$$

si sostituiscono prima:

$$Q = \frac{R_p}{2\pi f L} \qquad \text{poi} \qquad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\Delta f = \frac{2\pi f^2 L}{R_p} = \frac{\dfrac{2\pi L}{4\pi^2 L C}}{R_p} = \frac{1}{2\pi C R_p} = \frac{1}{6{,}28\cdot 100\cdot 10^{-12}\cdot 10^6} = 1590\ \text{Hz}$$

Problema 174. Un condensatore variabile, con perdite trascurabili, consente l'accordo da 530 a 1650 kHz di un circuito oscillatorio, con $L = 220\ \mu\text{H}$ ed un fattore di merito costante $Q = 180$. Calcolare per le due frequenze suddette e per quella di 1000 kHz la larghezza della banda passante.

Soluzione. Per la frequenza di 530 kHz:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{5{,}3\cdot 10^5}{180} = 2940\ \text{Hz}$$

Per la frequenza di 1000 kHz:

$$\Delta f = \frac{10^6}{180} = 5560\ \text{Hz}$$

Per la frequenza di 1650 kHz:

$$\Delta f = \frac{1{,}65\cdot 10^6}{180} = 9200\ \text{Hz}$$

Problema 175. Una bobina ed un condensatore di 500 pF, collegati in serie, costituiscono un circuito con frequenza di risonanza di 500 kHz. Collegato in serie un altro condensatore il circuito risuona alla frequenza di 1000 kHz: qual è la capacità del condensatore aggiunto?

Soluzione. Il valore della frequenza di risonanza di un circuito oscillatorio è dato da:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

affinchè il suo valore si raddoppi è necessario che si riduca a metà il valore del denominatore: il valore della capacità risulta sotto il radicale, quindi esso si deve ridurre alla quarta parte del valore iniziale.

Poichè a 1000 kHz è $C = 125$ pF il valore del condensatore collegato in serie è:

$$C_x = \frac{125\cdot 500}{500-125} = \frac{625\cdot 10^2}{3{,}75\cdot 10^2} = 167\ \text{pF}$$

Problema 176. Un condensatore variabile, con capacità minima di 40 pF, costituisce con una bobina un circuito oscillatorio, che risuona a 1650 kHz. Quale valore deve avere l'induttanza della bobina? Quale capacità massima deve avere il condensatore affinchè il circuito risuoni a 500 kHz?

Soluzione. L'induttanza della bobina è:

$$L = \frac{1}{(2\,\pi\,f)^2\,C} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 1{,}65 \cdot 10^6)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{4289} =$$

$$= 0{,}000233 = 233\ \mu\text{H}$$

Alla frequenza minima di 500 kHz la capacità del variabile deve risultare:

$$C_{max} = \frac{1}{(2\,\pi\,f_{min})^2\,L} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5)^2\,2{,}33 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2294 \cdot 10^6} =$$

$$= 0{,}000435 \cdot 10^{-6} = 435 \cdot 10^{-12}\ \text{F}$$

Problema 177. Un condensatore variabile ha una capacità massima di 415 pF ed una residua di 16 pF. Il circuito che vi è collegato ha una capacità distribuita di 28 pF. Quale valore deve avere l'induttanza della bobina da collegare al variabile per ottenere l'accordo del circuito oscillatorio su tutta la gamma di onde medie? Se la frequenza massima è di 1650 kHz quale sarà il valore della minima?

Soluzione. La capacità residua di 16 pF più quella distribuita di 28 pF costituiscono una capacità totale di 44 pF con cui il circuito risulta accordato a 1650 kHz, quindi:

$$L = \frac{1}{\omega^2\,C} = \frac{1}{39{,}4 \cdot 2{,}72 \cdot 10^{12} \cdot 44 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{4716} = 212\ \mu\text{H}$$

Ruotando il variabile per ottenere la massima capacità si realizza una capacità totale di $415 + 28 = 443$ pF e la minima frequenza di risonanza risulta:

$$f = \frac{1}{6{,}28\,\sqrt{212 \cdot 10^{-6} \cdot 443 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^9}{6{,}28\,\sqrt{93\,916}} = \frac{10^9}{1928} = 520\ \text{kHz}$$

Problema 178. Un condensatore variabile ha le seguenti caratteristiche: capacità minima 15 pF, massima 400 pF. Se questo condensatore è collegato ad un circuito, con capacità distribuita di 25 pF ed induttanza di 192 μH, consente di accordarlo a 500 kHz. A quale frequenza massima è possibile sintonizzare il circuito regolandolo alla minima capacità?

Soluzione. Con il condensatore regolato alla massima capacità si ha una capacità totale di sintonia di $400 + 25 = 425$ pF. Regolato alla minima capacità si ha una capacità totale di $15 + 25 = 40$ pF. La variazione totale di capacità è nel rapporto di $425/40 = 10,6$, quindi la variazione di frequenza realizzabile è nel rapporto dato da $\sqrt{10,6} = 3,25$, perciò la massima frequenza di sintonia è:

$$500 \cdot 3,25 = 1625 \text{ kHz}$$

Problema 179. Un circuito oscillatorio deve essere accordato da 500 a 1650 kHz: il condensatore variabile ha una capacità massima di 380 pF che va sommata alla capacità distribuita del circuito di 20 pF. Quale deve essere il valore dell'induttanza della bobina? Quale deve risultare la capacità residua del variabile?

Soluzione. Alla frequenza minima di 500 kHz la capacità di accordo è di $380 + 20 = 400$ pF, quindi l'induttanza:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(6,28 \cdot 5 \cdot 10^5)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-10}} = \frac{1}{39,4 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 10^{-10}} =$$

$$= \frac{1}{3940} = 0,000254 = 254 \ \mu\text{H}$$

Alla frequenza massima di 1650 kHz la capacità di accordo sarà:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(6,28 \cdot 1,65 \cdot 10^6)^2 \cdot 2,54 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \frac{1}{39,4 \cdot 2,72 \cdot 10^{12} \cdot 2,54 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{272,3 \cdot 10^8} = 0,0036 \cdot 10^{-8} = 36 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

dal valore di questa capacità va detratta quella distribuita del circuito per ottenere la residua del variabile:

$$36 - 20 = 16 \text{ pF}$$

Problema 180. Un circuito oscillatorio ha una bobina con induttanza di 170 μH e resistenza $R = 16\ \Omega$. Quale sarà il fattore di merito del circuito a 1200 kHz, ritenendo quello del condensatore notevolmente più elevato di quello della bobina? Quale sarà la larghezza di banda corrispondente?

Soluzione.

$$Q = \frac{\omega L}{R} = \frac{6,28 \cdot 1,2 \cdot 10^6 \cdot 1,7 \cdot 10^{-4}}{16} = \frac{1281}{16} = 80$$

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{1,2 \cdot 10^6}{80} = 15 \cdot 10^3 = 15\,000 \text{ Hz}$$

Problema 181. Un circuito oscillatorio lascia passare una corrente il cui valore è 0,707 I_{max} a 2 kHz fuori risonanza. La frequenza di sintonia del circuito è 500 kHz. Se la capacità di accordo è di 0,0006 μF qual è la resistenza del circuito?

Soluzione. La banda di frequenze lasciata passare è evidentemente di 4 kHz, da ciò risulta:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{500 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^3} = 125$$

L'induttanza della bobina è:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{39,6 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 6 \cdot 10^{-10}} = \frac{1}{5940} = 168 \cdot 10^{-6}$$

$$R = \frac{\omega L}{Q} = \frac{6,28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 168 \cdot 10^{-6}}{125} = \frac{527}{125} = 4,2 \ \Omega$$

Problema 182. In un circuito risuonante in serie a 1000 kHz la corrente si riduce al 45% aumentando la frequenza della tensione applicata di 15 kHz. Qual è il Q del circuito oscillatorio?

Soluzione. Quando si varia la frequenza della tensione applicata del valore f/Q rispetto alla frequenza di risonanza di un circuito oscillatorio in serie la corrente circolante si riduce al 45% del valore a risonanza:

$$\frac{f}{Q} = \frac{1000}{Q} = 15$$

risulta:

$$Q = \frac{1000}{15} = 66,8$$

Problema 183. Per determinare la resistenza a radiofrequenza R_b di una bobina si ricorre al metodo della variazione di resistenza del circuito. In un circuito oscillatorio in serie, di cui fa parte la bobina in misura, circola, a risonanza, una corrente di 100 mA. La resistenza dell'amperometro a *RF* è $R_s = 5 \ \Omega$. Se si inserisce nel circuito una resistenza $R = 10 \ \Omega$ la corrente si riduce a 65 mA. Qual è il valore della resistenza R_b?

Soluzione. La corrente, nelle due condizioni del circuito, è data da:

$$\frac{V}{R_b + R_s} = 0{,}1 \quad \text{e} \quad \frac{V}{R_b + R_s + R} = 0{,}065$$

$$V = (R_b + R_s)\,0{,}1 \qquad V = (R_b + R_s + R)\,0{,}065$$

$$0{,}1\ R_b + 0{,}1\ R_s = 0{,}065\ R_b + 0{,}065\ R_s + 0{,}065\ R$$

$$0{,}035\ R_b = 0{,}065\ R - 0{,}035\ R_s$$

$$0{,}035\ R_b = 0{,}65 - 0{,}175 = 0{,}475$$

$$R_b = \frac{0{,}475}{0{,}035} = 13{,}6\ \Omega$$

Problema 184. Un circuito oscillatorio in serie è costituito da una bobina con induttanza di 200 μH, un condensatore con capacità di 200 pF ed una resistenza di 7 Ω. Calcolare la frequenza di risonanza e la corrente che vi circola se si ritiene che la tensione indotta nella bobina sia di 0,1 V. Calcolare le correnti a frequenze di 10, 20, 30 kHz in più ed in meno della frequenza di risonanza.

Soluzione.

$$f_0 = \frac{1}{6{,}28\ \sqrt{200 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^7}{6{,}28\ \sqrt{4}} = \frac{10^7}{12{,}56} = 796\ \text{kHz}$$

$$I_0 = 0{,}1/7 = 0{,}014 = 14\ \text{mA}$$

a − 30 kHz, cioè a 766 kHz:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 7{,}66 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 962\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 7{,}66 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = \frac{10^5}{96{,}2} = 1039\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{7^2 + (962 - 1039)^2} = \sqrt{5978} = 77\ \Omega$$

$$I = 0{,}1/77 = 0{,}0013 = 1{,}3\ \text{mA}$$

a − 20 kHz, cioè a 776 kHz:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 7{,}76 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 974{,}6\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 7{,}76 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 1026\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{7^2 + (974 - 1026)^2} = \sqrt{2753} = 52{,}4\ \Omega$$

$$I = 0{,}1/52{,}4 = 0{,}0019 = 1{,}9\ \text{mA}$$

a − 10 kHz, cioè a 786 kHz:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 7{,}86 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 987\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 7{,}86 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 1013\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{7^2 + (987 - 1013)^2} = \sqrt{75} = 8{,}65\ \Omega$$

$$I = 0{,}1/8{,}65 = 0{,}011 = 11\ \text{mA}$$

a + 10 kHz, cioè a 806 kHz:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 8{,}06 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1012\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 8{,}06 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 990\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{7^2 + (1012 - 990)^2} = 8{,}42\ \Omega$$

$$I = 0{,}1/8{,}42 = 0{,}0118 = 11{,}8\ \text{mA}$$

a + 20 kHz, cioè a 816 kHz:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 8{,}16 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1024\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 8{,}16 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 976\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{7^2 + (1024 - 976)^2} = 48\ \Omega$$

$$I = 0{,}1/48 = 0{,}002 = 2\ \text{mA}$$

a + 30 kHz, cioè a 826 kHz:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 8{,}26 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1036\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 8{,}26 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 970\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{7^2 + (1036 - 970)^2} = 66\ \Omega$$

$$I = 0{,}1/66 = 0{,}0015 = 1{,}5\ \text{mA}$$

Problema 185. Un circuito oscillatorio è accordato con un condensatore variabile che consente una variazione di capacità da $C_{min} = 15$ pF a $C_{max} = 300$ pF. Qual è la minima frequenza a cui si può accordare il circuito se la massima risulta di 1 MHz? Se si collega in parallelo al condensatore variabile un condensatore fisso di 300 pF quali risulteranno le frequenze massima e minima di accordo del circuito?

Soluzione. Il condensatore variabile assicura una variazione di capacità:

$$\Delta C = \frac{C_{max}}{C_{min}} = \frac{300}{15} = 20$$

per cui la frequenza minima di accordo del circuito risulta:

$$f_{min} = \frac{f_{max}}{\sqrt{20}} = \frac{10^6}{4,47} = 2,24 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 224 \text{ kHz}$$

Con il collegamento in parallelo del condensatore fisso di 300 pF il condensatore variabile consente di ottenere una capacità:

$$C'_{min} = 15 + 300 = 315 \text{ pF}$$

ed una:

$$C'_{max} = 300 + 300 = 600 \text{ pF}$$

Considerando i nuovi valori delle capacità rispetto ai primitivi si ha:

$$f'_{max} = \frac{f_{max}}{\sqrt{315/15}} = \frac{10^6}{\sqrt{21}} = \frac{10^6}{4,58} = 2,18 \cdot 10^5 = 218 \text{ kHz}$$

$$f'_{min} = \frac{f'_{max}}{\sqrt{600/315}} = \frac{2,18 \cdot 10^5}{\sqrt{1,9}} = \frac{2,18 \cdot 10^5}{1,38} = 1,58 \cdot 10^5 = 158 \text{ kHz}$$

VALORI ISTANTANEI

Problema 186. Il valore massimo di una tensione alternata è di 125 V. Qual è il suo valore ai seguenti angoli di fase: 30°, 60°, 110°, 180°, 270°, 300° e 360°?

Soluzione.

Per l'angolo di 30° $v = V \operatorname{sen} \theta = 125 \cdot 0,5 = 62,5$ V
» » » 60° $v = 125 \cdot 0,86 = 107,5$ V
» » » 110° $v = 125 \cdot 0,939 = 117,4$ V
» » » 180° $v = 125 \cdot 0 = 0$ V

Per l'angolo di 270° $v = 125\,(-1) = -125$ V

» » » 300° $v = 125\,(-0{,}86) = -107{,}5$ V

» » » 360° $v = 125 \cdot 0 = 0$ V

Problema 187. Il valore istantaneo di una tensione alternata è di 250 V a 35°: quale ne è il valore massimo? Quale valore questa tensione massima avrà a 135°?

Soluzione. Il valore massimo della tensione è:

$$V = \frac{250}{\text{sen } 35^\circ} = \frac{250}{0{,}573} = 488 \text{ V}$$

Questa tensione avrà a 135° un valore istantaneo:

$$V = 250 \cdot \text{sen } 135^\circ = 250 \cdot 0{,}707 = 345 \text{ V}$$

Problema 188. Il valore efficace di una corrente è di 100 mA: qual è il suo valore istantaneo all'angolo di fase di 60°?

Soluzione. Il valore massimo della corrente è:

$$100 \cdot 1{,}41 = 141 \text{ mA}$$

all'angolo di fase di 60° si ha un'intensità:

$$141 \cdot 0{,}866 = 122 \text{ mA}$$

Problema 189. Ad una resistenza di 10 Ω è applicata una tensione massima di 20 V. A quale angolo di fase corrisponderà una corrente di 1 A?

Soluzione. La corrente massima è:

$$I = 20/10 = 2 \text{ A}$$

il valore istantaneo di 1 A corrisponderà ad un angolo di fase:

$$1 = 2 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ sen } 30^\circ$$

Problema 190. Una corrente alternata produce, su una resistenza di 25 Ω, lo stesso effetto termico di una corrente continua di 8 A. Qual è il valore massimo e quello efficace della tensione applicata alla resistenza? A quale angolo di fase corrisponde un valore metà della tensione massima?

Soluzione. Una corrente alternata efficace di 8 A produce lo stesso effetto termico su di una resistenza di una corrente continua di 8 A. Alla corrente efficace di 8 A corrisponde un valore massimo della corrente:

$$I_m = 8 \cdot 1{,}41 = 11{,}28 \text{ A}$$

Alla corrente efficace corrisponde una tensione efficace:

$$V = R\,I = 25 \cdot 8 = 200 \text{ V}$$

Alla corrente massima corrisponde una tensione massima:

$$V_m = R\,I_m = 25 \cdot 11{,}28 = 282 \text{ V}$$

All'angolo di fase di 30° corrisponde un valore metà della tensione massima poichè sen 30° = 0,5.

Problema 191. In un circuito la corrente è in ritardo di 60° rispetto alla tensione ed il suo valore massimo è di 4 A. Quando il vettore tensione è a 75° quale valore istantaneo avrà la corrente?

Soluzione. Quando il vettore tensione si trova a 75° quello corrente risulta a 75° — 60° = 15° quindi il valore istantaneo di questa sarà:

$$i = 4 \cdot \text{sen } 15^\circ = 4 \cdot 0{,}258 = 1{,}03 \text{ A}$$

Problema 192. Ad un circuito costituito da una bobina, il cui valore della reattanza è di 5 Ω, è applicata una tensione il cui valore istantaneo è di 48 V sotto un angolo di fase di 20°. Qual è il valore massimo della corrente nel circuito? Qual è il valore della corrente sotto l'angolo di fase suddetto?

Soluzione. Il valore massimo della tensione è:

$$v = V \text{ sen } 20^\circ \qquad 48 = V \cdot 0{,}342 \qquad V = \frac{48}{0{,}342} = 140 \text{ V}$$

ed il valore massimo della corrente:

$$I = V/X_L = 140/5 = 28 \text{ A}$$

Il valore istantaneo della corrente è:

$$i = I \text{ sen } (90^\circ + 20^\circ) = I \cos 20^\circ = 28 \cdot 0{,}94 = 26{,}32 \text{ A}$$

COSTANTE DI TEMPO

Problema 193. Un condensatore ha acquisito una carica $Q = 5\ \mu C$ sotto la tensione di 500 V: in quanto tempo si scaricherà se fra i suoi morsetti si inserisce un resistore di 0,5 MΩ?

Soluzione. Il condensatore ha una capacità:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{2}} = 10^{-8}\ \mathrm{F} = 10\,000\ \mathrm{pF}$$

La costante di tempo del circuito risulta:

$$R\,C = 5 \cdot 10^{5} \cdot 10^{-8} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{sec}$$

Ritenendo il tempo necessario per la scarica completa uguale a 7 volte la costante di tempo:

$$t = 7\,R\,C = 7 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 35\ \mathrm{msec}$$

Problema 194. Quale valore deve avere il resistore da inserire fra i morsetti di un condensatore di 1000 pF per ottenere la scarica in un tempo $t = 14\ \mu\mathrm{sec}$?

Soluzione. Ritenendo il tempo necessario per la scarica completa del condensatore uguale a sette volte la costante di tempo del circuito:

$$t = 7\,R\,C$$

si ha:

$$R = \frac{t}{7\,C} = \frac{14 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-9}} = 2 \cdot 10^{3}\ \Omega$$

Problema 195. Se un condensatore di 1 μF ed un resistore di 1 MΩ sono collegati in serie fra loro ed inseriti fra i morsetti di un generatore, con tensione 100 V, dopo quanto tempo la tensione fra le armature del condensatore risulta di 63 V?

Soluzione. La costante di tempo del circuito $R\,C$ indica il tempo in cui la tensione del condensatore raggiunge il 63% della tensione applicata al circuito: la tensione indicata nell'enunciato è appunto il 63% di quella del generatore perciò il tempo impiegato è:

$$R\,C = 10^{-6} \cdot 10^{6} = 1\ \mathrm{sec}$$

Sostituendo i valori noti nella formula che dà il valore della tensione fra le armature del condensatore:

$$V_c = V_b\,(1 - \varepsilon^{-t/RC})$$

si ha:

$$V_c = 100\,(1 - 2{,}718^{-1/1}) = 100\,(1 - 2{,}718^{-1}) = 100\left(1 - \frac{1}{2{,}718}\right) =$$

$$= 100\,(1 - 0{,}37) = 63 \text{ V}$$

Problema 196. Un condensatore di 0,1 μF si scarica su di una resistenza di 1 MΩ. Dopo quanto tempo la tensione iniziale di 100 V, esistente fra le armature del condensatore, si riduce a 37 V?

Soluzione. La tensione del condensatore è data da:

$$V_c = V\,(\varepsilon^{-t/RC})$$

La riduzione della tensione fra le armature al 37 % del valore iniziale avviene dopo un tempo uguale alla costante di tempo $R\,C$ del circuito, ch'è:

$$R\,C = 0{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{6} = 0{,}1 \text{ sec}$$

per cui:

$$V_c = 100\,(2{,}718^{-0{,}1/0{,}1}) = 100\,\frac{1}{2{,}718} = 37 \text{ V}$$

Problema 197. Un condensatore di 1 μF è collegato in serie ad un resistore di 1 MΩ: al circuito è applicata la tensione di una batteria di 12 V. Dopo quanto tempo la tensione fra le armature del condensatore raggiunge 7,55 V?

Soluzione. La tensione sul condensatore è data da:

$$V_c = V_b\,(1 - \varepsilon^{-t/RC}) \quad \text{cioè} \quad 7{,}55 = 12\,(1 - \varepsilon^{-t/RC})$$

da cui:

$$1 - \varepsilon^{-t/RC} = \frac{7{,}55}{12} = 0{,}63 \quad \text{ed} \quad \varepsilon^{-t/RC} = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$$

Dalla tabella XI risulta che per un tale valore della funzione esponenziale si ha un valore dell'esponente di circa 1:

$$\frac{t}{R\,C} = 1 \qquad t = R\,C = 10^{-6} \cdot 10^{6} = 1 \text{ sec}$$

Problema 198. Con l'uso della caratteristica universale della costante di tempo, in un circuito costituito da un condensatore di 0,001 μF in serie ad un resistore di 0,1 MΩ, si determini il valore della tensione fra le armature del condensatore, dopo 200 μsec dall'applicazione di una tensione di 200 V al circuito. Quale valore ha la caduta di tensione sulla resistenza nello stesso istante?

Soluzione. La costante di tempo del circuito è:

$$R\,C = 10^{-9} \cdot 10^{5} = 10^{-4} \text{ sec} = 100 \ \mu\text{sec}$$

Poichè il tempo 200 μsec è uguale a due volte la costante di tempo $R\,C$, dal valore 2 sull'asse delle ascisse della caratteristica si risalga sino alla caratteristica V_c: il valore dell'ordinata corrispondente al punto di intersezione è di 0,86, quindi:

$$V_c = 200 \cdot 0{,}86 = 172 \text{ V}$$

Dall'intersezione della verticale suddetta con la caratteristica V_R si ricava il valore in ordinate di 0,14, quindi:

$$V_R = 200 \cdot 0{,}14 = 28 \text{ V}$$

Problema 199. Con l'uso della caratteristica universale della costante di tempo, si determini, di un circuito costituito da un condensatore di 0,001 μF in serie ad una resistenza di 0,1 MΩ, il tempo necessario a far ridurre la caduta di tensione sulla resistenza a 120 V, se al circuito è applicata una tensione di 200 V.

Soluzione. La caduta di tensione sulla resistenza per ridursi a 120 V risulta di 120/200 = 0,6 della tensione massima applicata al circuito. A tale frazione della tensione massima corrisponde sulla caratteristica V_R un valore di 0,5 della costante di tempo.

Poichè la costante di tempo è di:

$$R\,C = 10^{5} \cdot 10^{-9} = 10^{-4} = 100 \ \mu\text{sec}$$

il tempo impiegato dalla caduta di tensione sulla resistenza per ridursi da 200 a 120 V è di:

$$0{,}5 \cdot 100 = 50 \ \mu\text{sec}$$

TRASFORMATORE

Problema 200. Un trasformatore è avvolto con 1650 spire al primario e con una spira al secondario. Quale tensione va applicata al primario affinchè al secondario si abbia una tensione di 0,27 V?

Soluzione. Il rapporto esistente fra le spire:

$$n = N_p/N_s = 1650$$

La tensione secondaria va moltiplicata per il rapporto n per ottenere la tensione che va applicata al primario:

$$V_p = n \cdot 0{,}27 = 1650 \cdot 0{,}27 = 445{,}5 \text{ V}$$

Problema 201. Un trasformatore, teoricamente perfetto, ha un rapporto di trasformazione di 10. Al primario è applicata una tensione di 100 V; al secondario è collegata una resistenza di 1 Ω, quindi essa è sostituita con una di 2 Ω. Quale carico presenta nei due casi il primario rispetto alla rete? Si può dedurre dai valori ottenuti una dimostrazione della formula $R_p = n^2 R_s$?

Soluzione. Al secondario si ha una tensione:

$$V_s = 100/10 = 10 \text{ V}$$

Nella resistenza di 1 Ω:

$$I = 10/1 = 10 \text{ A} \qquad P = V \cdot I = 10 \cdot 10 = 100 \text{ W}$$

Nel primario:

$$I = P/V = 100/100 = 1 \text{ A}$$

ed il carico presentato da esso alla rete:

$$R = V/I = 100/1 = 100 \ \Omega$$

Nella resistenza di 2 Ω:

$$I = 10/2 = 5 \text{ A} \qquad P = 10 \cdot 5 = 50 \text{ W}$$

Nel primario:

$$I = 50/100 = 0{,}5 \text{ A}$$

ed il carico presentato da esso alla rete è:

$$R = 100/0{,}5 = 200 \ \Omega$$

Nei due casi il valore della resistenza di carico trasferita al primario è:

$$R_p = n^2 R_c = 100 \cdot 1 = 100 \ \Omega$$
$$R_p = 100 \cdot 2 = 200 \ \Omega$$

Problema 202. Un trasformatore è avvolto con 3000 spire al primario, che ha una presa centrale, e 950 spire al secondario. Se a quest'ultimo si collega un carico di 500 Ω quale carico è riflesso su tutto il primario e quale su ogni metà del primario?

Soluzione. Il rapporto fra il numero delle spire è:

$$\frac{3000}{950} = 3{,}16$$

Il carico riflesso su tutto il primario è:

$$Z_p = n^2 Z_s = 3{,}16^2 \cdot 500 = 5000\ \Omega$$

quello su metà primario:

$$Z_p = 1{,}58^2 \cdot 500 = 1250\ \Omega$$

Problema 203. Un trasformatore, collegato con il primario ad una rete a 125 V, eroga una potenza di 100 W su una resistenza di 1 Ω collegata al secondario. Qual è il valore della tensione del secondario? Qual è l'intensità di corrente richiesta dal primario alla rete, ritenendo il trasformatore senza perdite? Quale è il rapporto di trasformazione?

Soluzione.

$$P = \frac{V_s^2}{R} \qquad V_s^2 = P\,R = 100 \qquad V_s = 10\ \text{V}$$

$$I_P = \frac{P}{V} = \frac{100}{125} = 0{,}8\ \text{A}$$

$$n = \frac{V_p}{V_s} = \frac{125}{10} = 12{,}5$$

Problema 204. Di quanto si riducono le perdite per correnti indotte se i lamierini del nucleo di un trasformatore, alto 20 mm, sono ridotti dallo spessore di 0,5 mm a 0,35 mm? Di quanto si riducono le perdite per correnti indotte nel caso i lamierini vengano ridotti allo spessore di 0,25 mm?

Soluzione. Il nucleo è costituito di $20/0{,}5 = 40$ lamierini da 0,5 mm. Risulterà costituito da $20/0{,}35 = 57$ lamierini da 0,35 mm. Poichè la larghezza del gambo centrale di un lamierino è molto maggiore dell'altezza si può ritenere che la lunghezza della spira media in cortocircuito, equivalente ad un lamierino, risulti invariata sia per uno spessore che per l'altro. La superficie della spira risulta però ridotta, nel caso del lamierino di 0,35, di $0{,}5/0{,}35 = 1{,}43$ e di altrettanto risulta ridotto il flusso concatenato con la spira e quindi la tensione indotta in essa. Se questa tensione ha il valore E per un lamierino di 0,5 mm risulta di $E/1{,}43$ per un lamierino di 0,35.

La resistenza della spira in corto circuito costituita da un lamierino di 0,5 è data da:

$$R = \rho\,\frac{l}{s}$$

che risulta:

$$R' = \rho \frac{l}{s/1{,}43} = \rho \frac{1{,}43\, l}{s}$$

per quello di 0,35 cioè di 1,43 volte maggiore.

La corrente indotta nel lamierino di 0,5 mm è:

$$I = \frac{E}{R}$$

ed in quello di 0,35:

$$I' = \frac{E/1{,}43}{R \cdot 1{,}43} = \frac{E}{R \cdot 1{,}43^2} = \frac{I}{1{,}43^2} = \frac{I}{2}$$

Le perdite nel lamierino di 0,5 mm sono $W = EI$, in quelle di 0,35 di:

$$W = \frac{E}{1{,}43} \frac{I}{2} = \frac{E\, I}{2{,}86}$$

cioè di 2,86 volte minori, ma i lamierini di 0,35 mm sono 57 invece di 40 di 0,5 mm, cioè 1,43 volte in più quindi in essi verrà dissipata una potenza totale:

$$W' = \frac{W}{2{,}86} 1{,}43 = \frac{W}{1{,}43}$$

rispetto quella dissipata dal pacco di lamierini di 0,5 mm.

Nel caso di riduzione dello spessore dei lamierini da 0,5 a 0,25 mm la tensione indotta in ognuno di essi è $E/2$ e la resistenza:

$$R'' = \rho \frac{l}{s/2} = \rho \frac{2\, l}{s}$$

è $R'' = 2\, R$ quindi la:

$$I'' = \frac{E/2}{2\, R} = \frac{E}{4\, R} = \frac{I}{4}$$

Le perdite in ogni lamierino sono:

$$W'' = \frac{E}{2} \frac{I}{4} = \frac{W}{8}$$

Ma i lamierini sono 80 invece di 40 quindi la perdita totale è:

$$W''_{tot} = \frac{W}{8} 2 = \frac{W}{4}$$

Con i lamierini di 0,25 mm si ha la riduzione delle perdite per correnti parassite alla quarta parte di quelle dei lamierini di 0,5 mm.

Problema 205. Un trasformatore, da inserire su di una rete a 125 V 50 Hz, ha un secondario per 250 V 2 A. Facendo lavorare il ferro ad 1 Wb/m² ed ammettendo un rendimento del 90%, determinare i principali dati costruttivi del trasformatore.

Soluzione. La potenza erogata dal secondario è:

$$P_s = 250 \cdot 2 = 500 \text{ W}$$

La sezione del nucleo risulta:

$$s = \sqrt{P_s} = \sqrt{500} = 22{,}3 \text{ cm}^2$$

e va portata a:

$$s = 22{,}3 + 10\% = 24{,}5 \text{ cm}^2$$

per le perdite di spazio fra i lamierini.

Il numero di spire per volt:

$$N/\mathrm{V} = 50/s = 50/22{,}3 = 2{,}24 \; sp/\mathrm{V}$$

Pertanto gli avvolgimenti avranno:
Primario 125 V:

$$sp = 2{,}24 \cdot 125 - 5\% = 280 - 14 = 266 \; sp$$

Secondario 250 V:

$$sp = 2{,}24 \cdot 250 + 5\% = 560 + 28 = 588 \; sp$$

La potenza assorbita dal primario è:

$$P_p = P_s + 10\% = 500 + 50 = 550 \text{ W}$$

e la corrente nel primario:

$$I = P/V = 550/125 = 4{,}4 \text{ A}$$

Il diametro dei conduttori sarà:

Primario: $d = 0{,}65 \sqrt{I} = 0{,}65 \sqrt{4{,}4} = 0{,}65 \cdot 2{,}1 = 1{,}35$ mm

Secondario: $d = 0{,}65 \sqrt{2} = 0{,}65 \cdot 1{,}41 = 0{,}92$ mm

Problema 206. Calcolare il trasformatore di alimentazione di un radioricevitore, le cui caratteristiche sono: primario 125-160 V, 50 Hz; secondario AT 330 + 330 V · 60 mA c.c.; secondario BT 6,3 V 3 A.

Soluzione. La potenza erogata dal secondario BT è:

$$P = V\,I = 6{,}3 \cdot 3 = 19 \text{ W}$$

Per il calcolo della potenza dell'avvolgimento AT occorre ritenere la corrente efficace del secondario di 1,5 volte quella continua fornita al carico:

$$P = 330 \cdot 0{,}06 \cdot 1{,}5 = 30 \text{ W}$$

La potenza totale fornita dai secondari è:

$$P_t = 30 + 19 = 49 \text{ W}$$

A questa potenza corrisponde la sezione del nucleo di ferro:

$$s = \sqrt{P} = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}^2$$

Questa è la sezione utile del ferro silicio, necessaria per ottenere un funzionamento con un'induzione di 1 Wb/m^2 a 50 Hz. La sezione va aumentata in pratica del 10% per tener conto dell'isolamento e degli spazi d'aria fra i lamierini, pertanto il nucleo di lamierini avrà una sezione:

$$s = 7 \cdot 1{,}1 = 7{,}7 \text{ cm}^2$$

Il numero delle spire per volt è dato da:

$$N/\text{V} = 50/s = 50/7{,}0 = 7{,}1 \; sp/\text{V}$$

Le spire degli avvolgimenti secondari vanno aumentate del 5%:

330 + 330 V $(2343 + 5\%) + (2343 + 5\%) = (2343 + 117) + (2343 + 117) =$
$= 2450 + 2450 \; sp$

6,3 V $45 + 5\% = 45 + 2 = 47 \; sp$

Le spire degli avvolgimenti primari vanno diminuite del 5%:

125 V $887 - 5\% = 887 - 44 = 843 \; sp$

160 V $1136 - 5\% = 1136 - 57 = 1079 \; sp$

Ammettendo un rendimento dell'85% la potenza assorbita dal primario è:

$$49 + 15\% = 49 + 7{,}5 = 56{,}5 \text{ W}$$

Le correnti negli avvolgimenti primari sono:

125 V	$56/125 = 0,45$ A
160 V	$56/160 = 0,35$ A

Ammettendo una densità di corrente di 3 A/mm² il diametro dei conduttori, a mezzo della formula $d = 0,65\sqrt{I}$, risulta:

125 V	$d = 0,65\sqrt{0,45} = 0,65 \cdot 0,67 = 0,44$ mm	smaltato
160 V	$d = 0,65\sqrt{0,35} = 0,65 \cdot 0,59 = 0,38$ mm	»
330 V	$d = 0,65\sqrt{0,06} = 0,65 \cdot 0,24 = 0,16$ mm	»
6,3 V	$d = 0,65\sqrt{3} = 0,65 \cdot 1,73 = 1,2$ mm	»

PARAMETRI DELLE VALVOLE

Problema 207. Per differenti valori di V_g (-4 e -8 V) determinare, dalle caratteristiche anodiche della 6 C 5, fig. 140, il valore della resistenza interna R_a per variazioni di 20 V della tensione anodica (non si deve giungere a correnti inferiori a 3 mA).

Soluzione.

$$V_g = -4 \text{ V} \qquad R_a = \frac{140 - 120}{0,005 - 0,0033} = \frac{20}{0,0017} = 11\,750\ \Omega$$

$$V_g = -8 \text{ V} \qquad R_a = \frac{240 - 220}{0,0071 - 0,0052} = \frac{20}{0,0019} = 10\,500\ \Omega$$

Problema 208. Un triodo ha un coefficiente di amplificazione $\mu = 18$ e una tensione anodica $V_a = 250$ V. Quale polarizzazione occorre dare alla griglia per portare la valvola all'interdizione?

Soluzione. Dalla:

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g}$$

si ricava con sufficiente approssimazione la tensione di interdizione:

$$V_g = V_a/\mu = 250/18 = -13,9 \text{ V}$$

Problema 209. Alla griglia di una valvola è applicata una tensione alternata che ne fa variare la tensione da -6 a -20 V. Qual è il valore efficace di questa tensione? Qual è il valore della tensione di polarizzazione della valvola ch'è fatta lavorare in classe A?

Soluzione. La tensione alternata applicata alla griglia ha un'ampiezza da picco a picco di $20 - 6 = 14$ V, per cui ogni semionda ha un'ampiezza massima di 7 V, il cui valore efficace è:

$$V_{eff} = 7 \cdot 0{,}707 = 4{,}95 \text{ V}$$

Questa tensione risulta sovrapposta alla polarizzazione, che deve risultare ad una tensione metà di quelle estreme raggiunte dalla griglia:

$$\frac{20 + 6}{2} = 13 \text{ V}$$

cioè essa avrà il valore di -13 V.

Problema 210. Un triodo 6C5, di cui $R_a = 10\ 000\ \Omega$ e $\mu = 20$, è alimentato con una tensione anodica di 250 V ed ha una polarizzazione di griglia di -8 V: la corrente anodica relativa a queste condizioni di lavoro è di 8,3 mA. Qual è la tensione con cui occorre polarizzare la valvola per ottenere una corrente anodica di 10,3 mA? Quale valore deve successivamente assumere la tensione anodica affinchè la corrente anodica riacquisti il valore di 8,3 mA? Paragonare i valori calcolati con quelli rilevabili dalle caratteristiche di fig. 139.

Soluzione. Poichè:

$$S = \frac{\mu}{R_a} = \frac{20}{10^4} = 2 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ mA/V}$$

si ottiene un aumento della corrente anodica di 2 mA riducendo la tensione di polarizzazione di 1 V, portandola cioè a -7 V.

Per ottenere il precedente valore di corrente anodica diminuendo la tensione anodica si ha dalla:

$$\mu = \Delta V_a / \Delta V_g = 20 \qquad \Delta V_a = \mu \Delta V_g = 20$$

occorre cioè portare la tensione a 230 V.

Problema 211. La resistenza interna di un triodo EBC3 è $R_a = 15\ 000\ \Omega$ e la sua pendenza $S = 2$ mA/V. Aumentando di 10 V la tensione di alimentazione anodica di quanto aumenta la corrente anodica? Quale variazione si deve apportare alla tensione di griglia, dopo questo aumento, per ottenere la corrente anodica primitiva?

Soluzione. Dalla:

$$R_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a}$$

si ottiene:

$$\Delta I_a = \frac{\Delta V_a}{R_a} = \frac{10}{15 \cdot 10^3} = 0{,}67 \cdot 10^{-3}\ \text{A} = 0{,}67\ \text{mA}$$

cioè la corrente anodica aumenta di 0,67 mA se si aumenta la tensione anodica di 10 V.

Dalla:

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g}$$

si ottiene:

$$\Delta V_g = \frac{\Delta I_a}{S} = \frac{0{,}67}{2} = 0{,}33\ \text{V}$$

cioè la polarizzazione di griglia va aumentata di 0,33 V per riottenere il valore primitivo della corrente anodica.

Problema 212. Il coefficiente di amplificazione di un triodo 6C5 è $\mu = 19$, con una tensione anodica $V_a = 100$ V, polarizzazione $V_g = -4$ V e corrente anodica $I_a = 1{,}8$ mA. Questa corrente anodica aumenta a 9,5 mA riducendo la polarizzazione a zero. Di quanto va ridotta la tensione anodica per ottenere nuovamente la corrente anodica di 1,8 mA?

Soluzione. Dalla:

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g}$$

si ricava:

$$\Delta V_a = \mu \, \Delta V_g = 19 \cdot 4 = 76\ \text{V}$$

La tensione anodica va ridotta a 100 — 76 = 24 V per ottenere anche con polarizzazione di 0 V la corrente anodica di 1,8 mA.

Problema 213. Variando la tensione anodica di un triodo da 50 a 150 V, mantenendo la polarizzazione a 0 V, si ha una variazione della corrente anodica da 2 a 7 mA. A quale valore va portata la tensione di polarizzazione della griglia per ridurre la corrente anodica a 2 mA, se il coefficiente di amplificazione è di 8? Quale dovrà essere la polarizzazione se $\mu = 30$?

Soluzione. Dalla:

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g}$$

si ricava:

$$\Delta V_g = \frac{\Delta V_a}{\mu} = \frac{100}{8} = 12{,}5 \text{ V}$$

La polarizzazione da dare alla griglia della valvola con $\mu = 8$ è di $-$ 12,5 V. La polarizzazione da dare alla griglia, se $\mu = 30$, è:

$$\Delta V_g = 100/30 = 3{,}3 \text{ V}$$

Problema 214. Quale variazione si ha nella corrente anodica di un triodo ($R_a = 10\,000\ \Omega$; $S = 2{,}5$ mA/V), alimentato a 250 V, se la tensione di polarizzazione di griglia è variata da -2 a -4 V? Quale valore della tensione si dovrà applicare all'anodo per ottenere, con la nuova polarizzazione, il valore primitivo della corrente anodica?

Soluzione. Dalla:

$$S = \Delta I_a / \Delta V_g$$

si ricava:

$$\Delta I_a = S \, \Delta V_g = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 5 \text{ mA}$$

La corrente anodica si riduce di 5 mA aumentando la polarizzazione di griglia di -2 V.

Dalla:

$$R_a = \Delta V_a / \Delta I_a$$

si ricava:

$$\Delta V_a = R_a \, \Delta I_a = 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 50 \text{ V}$$

La tensione anodica va aumentata di 50 V per ottenere nuovamente, con la polarizzazione di -4 V, la corrente anodica primitiva.

Problema 215. Determinare, a mezzo delle caratteristiche anodiche della 6C5, fig. 140, la pendenza corrispondente alle tensioni anodiche di 150 e 300 V quando la polarizzazione di griglia è regolata in modo da ottenere una corrente anodica di 2, di 5 o di 10 mA. L'escursione di griglia deve risultare in ogni caso di ± 1 V.

Soluzione.

I_a	$V_a = 150$ V		$V_a = 300$ V	
	$-V_g$	S	$-V_g$	S
2 mA	−6,7 V	$S = \frac{3,2 - 1,2}{2} = 1$ mA/V	−15,5	$S = \frac{2,7 - 1,4}{2} = 0,65$ mA/V
5 mA	−4,6 V	$S = \frac{7,1 - 3,3}{2} = 1,9$ mA/V	−12,4	$S = \frac{6,5 - 3,7}{2} = 1,4$ mA/V
10 mA	−2,25 V	$S = \frac{12,3 - 7,7}{2} = 2,3$ mA/V	non determinabile	non determinabile

Problema 216. Determinare i valori di μ, R_a ed S di un triodo EBC3, a mezzo della famiglia di caratteristiche anodiche di fig. 142, per una tensione anodica di 150 V ed 8 mA di corrente anodica.

Soluzione. Ai valori di V_a ed I_a dati dall'enunciato del problema corrisponde una polarizzazione di griglia $V_g = -1$ V. Ammettendo una variazione della tensione di polarizzazione di ± 1 V si ottengono:

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = \frac{180 - 120}{2 - 0} = \frac{60}{2} = 30$$

$$R_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} = \frac{180 - 120}{0,0106 - 0,0056} = \frac{60}{0,005} = 12\,000\ \Omega$$

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} = \frac{(10,6 - 5,6)\,10^{-3}}{2 - 0} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} = 2,5\ \text{mA/V}$$

Problema 217. Di un triodo si hanno i seguenti valori, con cui vanno calcolati, indipendentemente, quelli di μ, R_a ed S:

$V_g = -4$ V	$V_a = 250$ V	$I_a = 50$ mA
−4	200	32
−8	325	50
−8	250	26

Soluzione. Considerando le coppie di valori uguali di V_g, V_a ed I_a:

$$R_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} = \frac{50}{18 \cdot 10^{-3}} = 2,8\ \text{k}\Omega$$

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{4} = 6 \text{ mA/V}$$

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = \frac{75}{4} = 18{,}7$$

Problema 218. Dalle caratteristiche anodiche della 6C5 calcolare i valori della resistenza interna per $V_a = 150$ V e $V_g = -2$ V e per $V_a = 300$ V e $V_g = -12$ V, con variazioni della tensione anodica di 20 V. Dalle caratteristiche mutue relative alla stessa valvola calcolare i valori della pendenza corrispondenti alle identiche tensioni anodiche e di griglia, variando queste di -2 V, portandole cioè a -4 e -14 V. Mantenendo costanti le correnti anodiche calcolare i corrispondenti coefficienti di amplificazione, variando la tensione anodica da una caratteristica all'altra, cioè di 50 V.

Soluzione. Per la condizione $V_a = 150$ V e $V_g = -2$ V:

$$R_a = \frac{20}{0{,}0115 - 0{,}0092} = 8700 \ \Omega$$

$$S = \frac{(10{,}5 - 6) \cdot 10^{-3}}{2} = 2{,}25 \text{ mA/V}; \quad \mu = \frac{50}{2{,}5} = 20$$

Per la condizione $V_a = 300$ V e $V_g = -12$ V:

$$R_a = \frac{20}{0{,}0065 - 0{,}0047} = 11\,100 \ \Omega$$

$$S = \frac{(5{,}6 - 3{,}1) \cdot 10^{-3}}{2} = 1{,}25 \text{ mA/V}; \quad \mu = \frac{50}{2{,}6} = 19$$

Problema 219. Di un triodo, di cui si hanno i dati relativi alla caratteristica mutua per $V_a = 100$ V, e si conosce il coefficiente di amplificazione $\mu = 20$, si traccino le caratteristiche mutue per $V_a = 150$, 200 e 250 V.

Soluzione. Data la prima caratteristica mutua, di cui nello specchietto seguente sono i valori relativi ad alcuni punti, quella corrispondente a 150 V dovrà essere spostata verso sinistra di quanto è la distanza fra due tensioni di griglia differenti di:

$$\Delta V_g = \Delta V_a / \mu = 50/20 = 2{,}5 \text{ V}$$

Così per le caratteristiche successive.

V_g	I_a
0	8
-1	6
-3	2
-4	0,3
-5	0

Problema 220. Collegando in parallelo due triodi 6C5, con 250 V di tensione anodica ed una polarizzazione di -8 V, quali nuovi valori assumono R_a ed S, ammettendo una variazione della polarizzazione di 2 V meno? Come si mantiene il valore di μ?

Soluzione.

$$R_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_e} = \frac{260 - 240}{0{,}0092 - 0{,}0071} = \frac{20}{0{,}0021} = 9550 \ \Omega$$

La variazione di corrente introdotta nella formula precedente è relativa ad ogni valvola, quindi ad una variazione doppia di I_a corrisponde una resistenza interna metà, $R_a = 4775 \ \Omega$.

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} = \frac{(8{,}25 - 4{,}6) \cdot 10^{-3}}{2} = \frac{3{,}65 \cdot 10^{-3}}{2} = 1{,}82 \text{ mA/V}$$

La variazione di corrente per le due valvole in parallelo è doppia di quella introdotta nella formula precedente quindi la pendenza è doppia:

$$S = 3{,}64 \text{ mA/V}$$

Il coefficiente di amplificazione resta invariato.

Problema 221. La corrente anodica di un triodo, con $\mu = 25$, è $I_a = 7$ mA, con una tensione anodica $V_a = 250$ V ed una polarizzazione $V_g = -6$ V. Quale valore assume la corrente anodica se la tensione anodica è portata a 200 V e quella di griglia a -5 V?

Soluzione. Nella formula relativa alla corrente anodica:

$$I_a = K\left(V_g + \frac{V_a}{\mu}\right)^{3/2}$$

si può determinare il valore di K avvalendosi dei dati del problema:

$$7 = K\left(-6 + \frac{250}{25}\right)^{3/2} = K\sqrt{4^3} = K\,8 \qquad K = \frac{7}{8} = 0{,}88$$

Per la soluzione del problema:

$$I_a' = 0{,}88\left(-5 + \frac{200}{25}\right)^{3/2} = 0{,}88\ \sqrt{3^3} = 0{,}88 \cdot 5{,}2 = 4{,}57 \text{ mA}$$

Problema 222. Alla griglia di un triodo (con $\mu = 16$, $V_a = 250$ V, $V_g = -6$ V e $K = 1$) è applicata una tensione sinusoidale con valore massimo di 3 V: qual è il valore della corrente anodica a riposo e quali saranno i valori massimo e minimo di essa?

Soluzione. La corrente anodica di riposo ha un valore di:

$$I_{ao} = K\left(V_g + \frac{V_a}{\mu}\right)^{3/2} = \left(-6 + \frac{250}{16}\right)^{3/2} = (-6 + 15{,}6)^{3/2} =$$

$$= \sqrt{9{,}6^3} = \sqrt{883} = 29{,}7 \text{ mA}$$

Applicando alla griglia una tensione sinusoidale con valore massimo di 3 V si hanno valori istantanei della tensione di griglia di -3 e -9 V per cui:

$$I_{a\,max} = (-3 + 15{,}6)^{3/2} = \sqrt{12{,}6^3} = \sqrt{1993} = 44{,}6 \text{ mA}$$

$$I_{a\,min} = (-9 + 15{,}6)^{3/2} = \sqrt{6{,}6^3} = \sqrt{287} = 17 \text{ mA}$$

Problema 223. Di un pentodo di potenza 3Q5 si hanno le caratteristiche seguenti: $V_a = 85$ V; $I_a = 7$ mA; $V_s = 85$ V; $I_s = 0{,}8$ mA; $V_g = -5$ V; $R_a = 0{,}07$ MΩ; $S = 1{,}95$ mA/V; $R_c = 9000$ Ω; $P_u = 0{,}25$ W. Si determinino con i coefficienti di conversione i nuovi valori delle caratteristiche alimentando il pentodo a 110 V.

Soluzione. Si determina anzitutto il fattore di conversione della tensione:

$$F_v = 110/85 = 1{,}29$$

e la nuova tensione di polarizzazione di griglia sarà:

$$V_g' = V_g \cdot 1{,}29 = -5 \cdot 1{,}29 = -6{,}45 \text{ V}$$

Dal fattore di conversione delle correnti:

$$F_i = \sqrt{F_v^3} = \sqrt{2{,}14} = 1{,}46$$

si ottiene la nuova corrente anodica e quella di griglia schermo:

$$I_a' = I_a \cdot 1{,}46 = 7 \cdot 1{,}46 = 10{,}2 \text{ mA}$$

$$I_s' = I_s \cdot 1{,}46 = 0{,}8 \cdot 1{,}46 = 1{,}16 \text{ mA}$$

Dal fattore di conversione delle resistenze:

$$F_r = F_v/F_i = 1{,}29/1{,}46 = 0{,}88$$

risulta che la resistenza di carico assume il valore:

$$R_c' = 9000 \cdot 0{,}88 = 7920\ \Omega$$

Dal fattore di conversione della potenza:

$$F_p = F_v\, F_i = 1{,}88$$

si ottiene la nuova potenza di uscita:

$$P_u' = 0{,}25 \cdot 1{,}88 = 0{,}47\ \mathrm{W}$$

Dal fattore di conversione della pendenza:

$$F_s = F_i/F_v = 1{,}13$$

si ha:

$$S' = 1{,}95 \cdot 1{,}13 = 2{,}2\ \mathrm{mA/V}$$

Il costruttore fornisce per questo pentodo, alimentato a 110 V, le seguenti caratteristiche, che coincidono con quelle calcolate: $I_a = 10$ mA; $I_s = 1{,}4$ mA; $R_c = 8000\ \Omega$; $P_u = 0{,}4$ W; $S = 2{,}2$ mA/V.

Problema 224. Per stabilizzare la tensione di griglia schermo di un pentodo invece di far uso di una resistenza in serie, fig. 108 *a*, per ridurre la tensione di alimentazione da 200 a 100 V, con una corrente di griglia schermo di

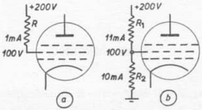


Fig. 108.

1 mA, si farà uso di un partitore che assorba una corrente 10 volte maggiore di quella dell'elettrodo alimentato, fig. 108 *b*. Calcolare i valori dei resistori da adoperare nei due circuiti e le variazioni di tensione, che si verificano nei due casi, quando, variando la polarizzazione di griglia, la corrente di schermo aumenta da 1 a 1,5 mA.

Soluzione. Nel primo circuito:

$$R = 100/10^{-3} = 100 \cdot 10^3 \ \Omega$$

Aumentando la corrente di griglia schermo ad 1,5 mA si ha su R una caduta di tensione:

$$V = 10^5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 150 \ \mathrm{V}$$

La tensione di griglia schermo si riduce a 50 V.

Per ottenere con il partitore, secondo schema, una tensione della griglia schermo di 100 V:

$$R_1 = \frac{100}{11 \cdot 10^{-3}} = 9{,}1 \cdot 10^3 \ \Omega$$

$$R_2 = \frac{100}{10 \cdot 10^{-3}} = 10 \cdot 10^3 \ \Omega$$

Aumentando la corrente di griglia schermo ad 1,5 mA si ha:

$$V = 9{,}1 \cdot 10^3 \cdot 11{,}5 \cdot 10^{-3} = 104{,}5 \ \mathrm{V}$$

La tensione di griglia schermo si riduce a:

$$V_{gs} = 200 - 104{,}5 = 95{,}5 \ \mathrm{V}$$

La riduzione della tensione di schermo risulta effettivamente inferiore, cioè la tensione di schermo risulta maggiore di 95,5 V, perchè con la riduzione di questa tensione si ha riduzione della corrente in R_2 e quindi di quella totale in R_1.

CARICO ANODICO

Problema 225. Qual è il coefficiente di amplificazione di un triodo che, con una resistenza di carico di 50 kΩ, uguale a quattro volte il valore di R_a, fornisce una tensione di uscita di 18 V applicando alla griglia una tensione alternata di 1,2 V?

Soluzione. Dalla:

$$A = \frac{V_u}{V_e} = \mu \frac{R_e}{R_a + R_e}$$

si ricava:

$$\mu = \frac{\frac{V_u}{V_e}}{\frac{R_c}{R_a + R_c}} = \frac{V_u (R_a + R_c)}{V_e R_c} = \frac{18\,(12{,}5 + 50)\,10^3}{1{,}2 \cdot 50 \cdot 10^3} = \frac{1125}{60} = 18{,}7$$

Il coefficiente di amplificazione del triodo è di 18,7.

Problema 226. Un triodo ha i parametri seguenti: $\mu = 12$, $S = 1{,}7$ mA/V. Sul suo circuito anodico è inserito un carico $R_c = 50$ kΩ. Variando la tensione di griglia di 2,5 V quale sarà la variazione corrispondente nella tensione anodica?

Soluzione. La resistenza interna della valvola:

$$R_a = \frac{\mu}{S} = \frac{12}{1{,}7} = 7{,}05 \text{ k}\Omega$$

$$V_u = \mu\, V_g \frac{R_c}{R_a + R_c} = 12 \cdot 2{,}5 \frac{50}{7{,}05 + 50} = 30 \cdot 0{,}87 = 26{,}1$$

Problema 227. Un triodo tipo 75 ha il coefficiente di amplificazione $\mu = 100$ e la resistenza interna $R_a = 90\,000\ \Omega$. Quale resistenza di carico si deve inserire sul suo circuito anodico per ottenere un'amplificazione di 75 volte?

Soluzione. Dalla formula:

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c}$$

si ricava:

$$A\,(R_a + R_c) = \mu\, R_c$$

$$A\, R_a = \mu\, R_c - A\, R_c$$

$$A\, R_a = R_c\, (\mu - A)$$

$$R_c = \frac{A\, R_a}{\mu - A} = \frac{75 \cdot 9 \cdot 10^4}{100 - 75} = \frac{675}{25}\, 10^4 = 27 \cdot 10^4\ \Omega$$

La resistenza di carico da inserire sul circuito anodico è di 270 000 Ω.

Problema 228. Il coefficiente di amplificazione di un triodo è 15; il carico anodico ha un valore uguale a quattro volte la resistenza interna della valvola. Quale amplificazione si realizza?

Soluzione. Dato che $R_c = 4\,R_a$:

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} = 15 \frac{4\,R_a}{4\,R_a + R_a} = 15 \frac{4}{5} = 12$$

L'amplificazione che si ottiene con un carico simile è di 12 volte.

Problema 229. Qual è l'amplificazione che si realizza con una resistenza di carico $R_c = 0{,}1\ \mathrm{M\Omega}$ inserita sul circuito anodico di un triodo ($\mu = 15$ ed $R_a = 15\,000\ \Omega$) o su quello di un pentodo ($\mu = 1200$ ed $R_a = 1{,}2\ \mathrm{M\Omega}$)?

Soluzione. Con il triodo si ha un'amplificazione:

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} = 15 \frac{100 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3 + 100 \cdot 10^3} = 15 \cdot 0{,}87 = 13$$

Con il pentodo l'amplificazione ottenuta è:

$$A = 1200 \frac{10^5}{10^5 + 12 \cdot 10^5} = \frac{1200}{13} = 92$$

Problema 230. Un triodo EBC3 è polarizzato a -3 V. Determinarne la resistenza interna per una tensione anodica di 130 V. Si inserisca sul circuito anodico una resistenza $R_c = 0\ 05\ \mathrm{M\Omega}$ e si alimenti la valvola con una tensione $V_b = 250$ V e si calcoli il valore della pendenza dinamica ritenendo μ invariato. Se $\mu = 30$ quale amplificazione si ottiene?

Soluzione. Dalla famiglia di caratteristiche anodiche di fig. 99 si ricava:

$$R_a = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} = \frac{140 - 120}{0{,}003 - 0{,}002} = \frac{20}{0{,}001} = 20\ \mathrm{k\Omega}$$

Si tracci la retta di carico per $R_c = 50\ \mathrm{k\Omega}$: essa unirà il punto sull'asse delle ascisse a 250 V con quello sull'asse delle ordinate a 5 mA. La pendenza dinamica è:

$$S = \frac{\mu}{R_a + R_c} = \frac{30}{20 \cdot 10^3 + 50 \cdot 10^3} = \frac{30}{70 \cdot 10^3} = 0{,}43\ \mathrm{mA/V}$$

e l'amplificazione:

$$A = \frac{\mu\, R_c}{R_a + R_c} = \frac{30 \cdot 5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4} = \frac{150}{7} = 21{,}5$$

Tracciando, a mezzo dei valori rilevati sulla retta di carico, la caratteristica mutua dinamica sulla famiglia di caratteristiche di fig. 98 si ha, per una variazione della tensione di griglia da -2 a -4, una variazione della corrente anodica da 2,7 a 1,8 mA cioè una pendenza di:

$$S = \frac{2{,}7 - 1{,}8}{4 - 2} = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45 \text{ mA/V}$$

simile a quella calcolata.

La Casa costruttrice dà il valore di 22 per l'amplificazione realizzata con questa valvola nelle suddette condizioni di funzionamento.

Problema 231. Si colleghi sul circuito anodico di un triodo 6C5 una resistenza variabile e si alimenti la valvola a 250 V, dando alla griglia una tensione di -8 V. Quale valore deve assumere la resistenza di carico per dissipare su di essa la massima potenza in corrente alternata? Qual è il valore di questa potenza?

Soluzione. La massima potenza è fornita da un generatore al carico quando questo ha un valore di resistenza uguale a quello della resistenza interna del generatore. Per una prima approssimazione si determina sulla famiglia di caratteristiche di fig. 140 la resistenza interna intorno ai valori delle tensioni di alimentazione:

$$R_a = \frac{260 - 240}{0{,}0092 - 0{,}0071} = \frac{20}{0{,}0021} = 9{,}500 \ \Omega$$

Con una resistenza di carico di 10 000 Ω sul circuito anodico nella valvola circolano 4,3 mA e la resistenza interna per il nuovo punto di lavoro è:

$$R_a = \frac{220 - 200}{0\ 0052 - 0\ 0036} = \frac{20}{0{,}0016} = 12\ 500 \ \Omega$$

Inserendo un carico di 12 500 Ω si ha una corrente di riposo di 3 9 mA. Applicando una tensione di picco di 2 V alla griglia si hanno variazioni nella corrente anodica di $5{,}4 - 2{,}5 = 2{,}9$ mA e una potenza dissipata sul carico:

$$P = 12\ 500 \cdot 0{,}0029^2 = 0\ 085 \text{ W} = 85 \text{ mW}$$

il cui valore efficace è:

$$P_{eff} = \frac{0{,}085}{2\sqrt{2}} = 0{,}03 \text{ W} = 30 \text{ mW}$$

Problema 232. Un triodo 6C5 ha i seguenti parametri: $\mu = 20$, $R_a = 9400\ \Omega$. Calcolare il guadagno realizzato con una resistenza di carico $R_c = 50$ kΩ. Costruire sulla famiglia di caratteristiche anodiche di fig. 140 la retta di carico corrispondente, con una tensione di alimentazione anodica di 250 V ed una polarizzazione di griglia di -6 V. Applicando alla griglia una tensione alternata di 4 V di picco quali sono i valori massimo e minimo della tensione sull'anodo e qual è l'amplificazione realizzata?

Soluzione. L'amplificazione calcolata è:

$$A = \frac{\mu R_c}{R_a + R_c} = \frac{20 \cdot 5 \cdot 10^4}{9{,}4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4} = 16{,}8$$

La retta di carico congiunge la tensione anodica di 250 V con la corrente anodica di 5 mA sui rispettivi assi. Sulla retta di carico alla polarizzazione di -6 V corrisponde una corrente di riposo di 2,2 mA ed una tensione sull'anodo di 142 V. Alle variazioni della tensione di griglia di 8 V da picco a picco corrispondono variazioni della tensione sull'anodo di:

$$191 - 83 = 108 \text{ V}$$

ed un'amplificazione:

$$A = 108/8 = 13{,}5$$

Problema 233. In un amplificatore di tensione si fa uso di un triodo con le seguenti caratteristiche: $\mu = 25$, $S = 2{,}2$ mA/V e $I_{ao} = 7$ mA. Sul circuito anodico è inserita una resistenza di carico di 50 kΩ; applicando alla griglia una tensione alternata il cui valore di picco è 1,5 V si calcoli: il valore efficace della tensione amplificata; il valore efficace della componente alternativa della corrente anodica; il valore degli elementi del gruppo catodico (per ottenere una polarizzazione $V_g = -4{,}5$ V ed amplificare una frequenza minima $f = 70$ Hz).

Soluzione. Dalle caratteristiche note si ricava:

$$R_a = \mu/S = 25/2{,}2 = 11{,}3 \text{ k}\Omega$$

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} = 25 \frac{50}{50 + 11{,}3} = 20$$

e poichè:

$$V_{eff} = 1{,}5 \cdot 0{,}7 = 1{,}06$$

risulta:

$$V_u = V_{eff} \cdot A = 1{,}06 \cdot 20 = 21{,}5 \text{ V}$$

La corrente nel carico è:

$$I_u = V_u/R_c = 21{,}5/50 \cdot 10^3 = 0{,}43 \text{ mA}$$

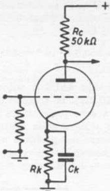


Fig. 109.

La resistenza catodica avrà il valore:

$$R_k = 4{,}5/7 = 0{,}640 \text{ k}\Omega$$

ed il condensatore una capacità minima:

$$C = \frac{10}{2\pi f R_k} = \frac{10}{6{,}28 \cdot 70 \cdot 640} = 0{,}0000355 \text{ F} = 35{,}5 \ \mu\text{F}$$

Problema 234. Sul circuito anodico di un triodo 6C5, alimentato con $V_b = 250$ V e polarizzato a $V_g = -8$ V, è collegata una resistenza variabile di 50 000 Ω. Determinare graficamente, sulla famiglia di caratteristiche anodiche di fig. 140, i valori che la corrente anodica I_{ao} assume per valori di R_c di 0 Ω, di 20 000 Ω e di 50 000 Ω; i valori della tensione sull'anodo V_{ao} per ognuno dei carichi suddetti; il valore della resistenza di carico con cui si ha una corrente anodica di 2 mA; la caduta di tensione su $R_c = 20\,000$ Ω.

Soluzione. Tracciate le varie rette di carico, di cui la prima, corrispondente a 0 Ω, è una verticale passante per $V_b = 250$ V; la seconda congiunge 12,5 mA con 250 V; la terza congiunge 5 mA con 250 V, si rilevano i seguenti valori:

R_c	I_{ao}	V_{ao}
0 Ω	8,3 mA	250 V
20 000 Ω	2,9 mA	190 V
50 000 Ω	1,7 mA	168 V

Il valore della resistenza di carico, a cui corrisponde una corrente anodica $I_{ao} = 2$ mA, è trovato congiungendo il punto, sulla caratteristica corrispondente a $V_g = -8$ V, alla stessa altezza del valore suddetto sull'asse delle ordinate, con il punto a 250 V sull'asse delle ascisse. Prolungando questo segmento tracciato, fino ad incontrare l'asse delle ordinate, esso determina su questo il valore 6,6 mA e si ha:

$$R_c = 250/6{,}6 \cdot 10^{-3} = 38 \cdot 10^3\ \Omega$$

Problema 235. Un pentodo 6AU6 è adoperato come amplificatore ad audio frequenza (100÷10 000 Hz). Le tensioni di griglia schermo di 125 V e la relativa corrente di 3 mA sono prelevati da un partitore di 50 000 Ω. La tensione anodica è di 250 V e la corrente relativa è di 7,6 mA. Quali valori debbono avere le due resistenze del partitore e la capacità del condensatore di schermo? Quali valori debbono avere i componenti del gruppo di autopolarizzazione catodica, se $V_g = -1{,}6$ V?

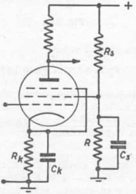


Fig. 110.

Soluzione. Il partitore richiede una corrente:

$$I = 2{,}5 \cdot 10^2/5 \cdot 10^4 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{A} = 5\ \text{mA}$$

Nella resistenza R_s del partitore collegata fra il positivo e la griglia schermo circola una corrente di 8 mA e la caduta di tensione che deve verificarsi su di essa è di $250 - 125 = 125$ V, quindi avrà il valore:

$$R_s = 125/8 = 15{,}6\ \text{k}\Omega$$

La resistenza R sarà di $50 - 15{,}6 = 34{,}4$ kΩ.

Il condensatore di schermo avrà una capacità la cui reattanza, a 100 Hz, risulti dello stesso valore della resistenza di alimentazione in serie, cioè delle due resistenze del partitore considerate in parallelo fra loro, quindi:

$$R = \frac{15{,}6 \cdot 34{,}4}{50} = 10{,}8 \text{ k}\Omega$$

per cui:

$$C_s = \frac{1}{2\,\pi\, f\, R_p} = \frac{1}{628 \cdot 10{,}8 \cdot 10^3} = 0{,}147 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 0{,}15\ \mu\text{F}$$

La resistenza catodica deve avere il valore:

$$R_k = \frac{V_g}{I_a + I_s} = \frac{1{,}6}{7{,}6 + 3} = 0{,}15 \text{ k}\Omega = 150\ \Omega$$

ed il condensatore catodico una capacità tale che la sua reattanza, a 100 Hz, risulti la decima parte di R_k:

$$C_k = \frac{10}{628 \cdot 150} = \frac{10}{9{,}4 \cdot 10^4} = 1{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ F} = 106\ \mu\text{F}$$

Problema 236. Una tensione di 3 V efficaci, a 1000 Hz, è applicata alla griglia di un triodo ($\mu = 15$, $R_a = 10\,000\ \Omega$) con un carico resistivo $R_c = 10\,000\ \Omega$. Calcolare: la tensione alternata presente sul carico; la corrente alternata nel carico; la potenza dissipata nel carico. Ripetere gli stessi calcoli per un carico anodico costituito da una bobina con $L = 3$ H e resistenza trascurabile.

Soluzione. Con un carico resistivo di $10^4\ \Omega$ si ottiene un'amplificazione:

$$A = \mu\, \frac{R_c}{R_a + R_c} = 15\, \frac{10^4}{10^4 + 10^4} = 7{,}5$$

La tensione alternata sul carico risulta:

$$V_c = A\, V_s = 3 \cdot 7{,}5 = 22{,}5\ V_{eff}$$

e la relativa corrente:

$$I_c = V_c/R_c = 22{,}5/10^4 = 0{,}00225 \text{ A} = 2{,}25 \text{ mA}$$

con una potenza dissipata:

$$P_c = V_c\, I_c = 22{,}5 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-3} = 50{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}05 \text{ W}$$

Con il carico anodico reattivo, di 3 H, la cui reattanza a 1000 Hz è:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 3 = 1{,}88 \cdot 10^4 = 18\,800\ \Omega$$

si ottiene un'amplificazione:

$$A = \mu \frac{X_L}{\sqrt{R_a^2 + X_L^2}} = 15 \frac{1{,}88 \cdot 10^4}{\sqrt{(10^4)^2 + (1{,}88 \cdot 10^4)^2}} =$$

$$= 15 \frac{1{,}88 \cdot 10^4}{\sqrt{10^8 + 3{,}54 \cdot 10^8}} = 15 \frac{1{,}88 \cdot 10^4}{10^4 \sqrt{4{,}54}} = 15 \frac{1{,}88 \cdot 10^4}{2{,}13 \cdot 10^4} = 13{,}2$$

La tensione sul carico risulta:

$$V_c = 3 \cdot 13{,}2 = 39{,}6 \text{ V}$$

e la corrente nel carico:

$$I_c = 39{,}6/1{,}88 \cdot 10^4 = 0{,}0021 \text{ A} = 2{,}1 \text{ mA}$$

in cui la potenza dissipata è:

$$P_c = V\, I \cos \varphi = 0$$

essendo il carico puramente reattivo.

Problema 237. Determinare, a mezzo della famiglia di caratteristiche anodiche di fig. 140, relativa al triodo 6C5, la percentuale della seconda armonica della corrente anodica che si ottiene su carichi $R_c = 20\,000\ \Omega$ ed $R_c = 50\,000\ \Omega$.

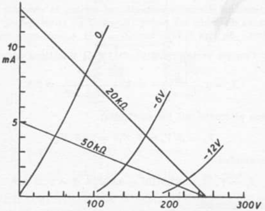


Fig. 111.

La tensione di alimentazione è $V_b = 250$ V e quella di polarizzazione è $V_g =$ $= -6$ V. Il valore massimo della tensione alternativa applicata alla griglia è di 6 V.

Soluzione. La massima escursione di griglia per i due carichi è da 0 a − 12 V. Sul carico di 20 000 Ω si hanno i seguenti valori della corrente anodica:

$$I_o = 4{,}1 \text{ mA}; \; I_{max} = 8{,}2 \text{ mA}; \; I_{min} = 1{,}3 \text{ mA}$$

per cui le ampiezze della fondamentale e della seconda armonica risultano:

$$\text{fondamentale} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} = \frac{8{,}2 - 1{,}3}{2} = 3{,}45 \text{ mA}$$

$$\text{seconda armonica} = \frac{I_{max} + I_{min} - 2\,I_o}{4} = \frac{8{,}2 + 1{,}3 - 8{,}2}{4} = 0{,}32 \text{ mA}$$

$$\frac{\text{seconda armonica}}{\text{fondamentale}} = \frac{0{,}32}{3{,}45} = 0{,}089 = 8{,}9\%$$

Sul carico di 50 000 Ω si hanno i seguenti valori della corrente anodica:

$$I_o = 2{,}2 \text{ mA}; \; I_{max} = 4 \text{ mA}; \; I_{min} = 0{,}8 \text{ mA}$$

per cui le ampiezze della fondamentale e della seconda armonica risultano:

$$\text{fondamentale} = \frac{4 - 0{,}8}{2} = 1{,}6 \text{ mA}$$

$$\text{seconda armonica} = \frac{4 + 0{,}8 - 4{,}4}{4} = 0{,}1 \text{ mA}$$

$$\frac{\text{seconda armonica}}{\text{fondamentale}} = \frac{0{,}1}{1{,}6} = 0{,}062 = 6{,}2\%$$

Problema 238. Calcolare la capacità di entrata di un pentodo che ha $C_{ga} = 0{,}005$ pF, $C_{gk} = 5$ pF, $C_{gs} = 5$ pF e fornisce un'amplificazione $A = 200$; quella di un pentodo di potenza con $C_{ga} = 0{,}5$ pF, $C_{gk} = 5$ pF, $C_{gs} = 5$ pF ed $A = 40$; quella di un triodo con $C_{ga} = 4$ pF, $C_{gk} = 5$ pF e $A = 30$.

Soluzione. La capacità d'ingresso di una valvola è data da:

$$C_g = C_{gk} + C_{gs} + C_{ga}\,(1 + A)$$

Per il primo pentodo:

$$C_g = 5 + 5 + 0{,}005 \cdot 201 = 11 \text{ pF}$$

Per il pentodo di potenza:

$$C_g = 5 + 5 + 0{,}5\,(1 + 40) = 30{,}5 \text{ pF}$$

Per il triodo:

$$C_g = C_{gk} + C_{ga}(1 + A) = 5 + 4(1 + 30) = 129 \text{ pF}$$

Problema 239. Per l'accoppiamento alla griglia di una valvola amplificatrice, con resistenza di fuga di griglia di 0,1 MΩ, quale valore della capacità deve avere il condensatore per ottenere un'amplificazione uniforme sino a 10 Hz? Per ottenere una simile amplificazione sino a 50 Hz quale capacità sarà sufficiente?

Soluzione. Per un'amplificazione uniforme, a cui corrisponda cioè 0,707 dell'uscita massima ottenuta alle frequenze medie, occorre che alla frequenza di 10 Hz la reattanza del condensatore di accoppiamento alla griglia risulti di 10^5 Ω, cioè di valore uguale alla resistenza di fuga di griglia:

$$C = \frac{1}{2\pi f X} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10 \cdot 10^5} = 0{,}16 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 0{,}16 \ \mu\text{F}$$

Per ottenere lo stesso risultato per una frequenza di 50 Hz:

$$C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 10^5} = 0{,}0031 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 31\,000 \text{ pF}$$

Problema 240. Una valvola amplificatrice ha la resistenza di fuga di griglia di 0,5 MΩ ed un condensatore di accoppiamento all'entrata di 10 000 pF. A quale frequenza risulta applicata alla griglia una tensione di 0,7 volte quella di entrata dell'amplificatore? Se la resistenza di fuga di griglia è sostituita con una di 0,1 MΩ quale capacità si deve adoperare per l'accoppiamento all'entrata per ottenere la stessa riduzione di tensione alla stessa frequenza?

Soluzione. La frequenza a cui si ha la riduzione al 70% sulla griglia della tensione d'ingresso è quella per cui si verifica l'uguaglianza $X_c = R_g$, cioè:

$$\frac{1}{2\pi f\, 10^{-8}} = 5 \cdot 10^5$$

da cui:

$$f = \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^5} = \frac{10^3}{31{,}4} = 31{,}8 \text{ Hz}$$

Riducendo la resistenza di fuga di griglia a 0,1 MΩ e dovendo verificarsi ancora la suddetta uguaglianza alla stessa frequenza:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 31{,}8 \cdot C} = 10^5$$

da cui:

$$C = \frac{1}{200 \cdot 10^5} = 0{,}05 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} = 50\,000\ \mathrm{pF}$$

Problema 241. Un triodo 6C5 ($\mu = 20$ ed $R_a = 10\,000\ \Omega$) è adoperato come amplificatore a resistenza capacità con $R_c = 50\,000\ \Omega$. La capacità totale distribuita del circuito di accoppiamento con la valvola successiva ($R_g = 0{,}5\ \mathrm{M\Omega}$, $C_g = 0{,}01\ \mu\mathrm{F}$) è di 200 pF. Calcolare entro quale gamma di frequenze l'amplificazione si mantiene al disopra del 70% dell'amplificazione massima.

Soluzione. L'amplificazione fornita dal triodo alle frequenze medie è:

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} = 20 \frac{50}{10 + 50} = 16{,}6$$

L'uguaglianza del valore della reattanza del condensatore C_g con quello della resistenza R_g si verifica alla frequenza:

$$f = \frac{1}{2\pi R_g C_g} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^3}{31{,}4} = 31{,}8\ \mathrm{Hz}$$

ch'è la frequenza a cui si ha la riduzione dell'amplificazione al 70%.

Per il calcolo della frequenza a cui si verifica l'uguaglianza del valore della reattanza della capacità distribuita con quello della resistenza esistente fra l'anodo e la massa è necessario anzitutto calcolare la resistenza equivalente al parallelo della resistenza interna del triodo, della resistenza di carico anodico e della resistenza di fuga di griglia: quest'ultima può essere trascurata perchè di valore molto più elevato delle altre due.

$$R_{eq} = \frac{R_a R_c}{R_a + R_c} = \frac{10^4 \cdot 5 \cdot 10^4}{10^4 + 5 \cdot 10^4} = 8330\ \Omega$$

$$8330 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot 2 \cdot 10^{-10}}$$

$$f = \frac{1}{6{,}28 \cdot 2 \cdot 8{,}33 \cdot 10^{-7}} = \frac{10^7}{104{,}6} = 96\,000\ \mathrm{Hz}$$

Problema 242. Se la capacità distribuita del circuito di accoppiamento di un pentodo ($R_a = 1\ \mathrm{M\Omega}$) con la valvola successiva è di 100 pF, qual è la frequenza più elevata che è amplificata ancora uniformemente (0,707 del valore massimo ottenibile) quando la resistenza di carico del pentodo ha uno dei seguenti valori, $R_c = 0{,}1$ MΩ oppure $R_c = 0{,}25$ MΩ oppure $R_c = 0{,}5$ MΩ, e la resistenza di fuga di griglia dello stadio successivo è di 0,5 MΩ?

Soluzione. Il parallelo di R_g ed R_a assume il valore:

$$\frac{1 \cdot 0{,}5}{1 + 0{,}5} = 0{,}333 \text{ M}\Omega$$

Per $R_c = 0{,}1$ MΩ: $R_1 = \dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}33}{0{,}1 + 0{,}33} = 0{,}077$ MΩ

Per $R_c = 0{,}25$ MΩ: $R_2 = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}33}{0{,}25 + 0{,}33} = 0{,}143$ MΩ

Per $R_c = 0{,}5$ MΩ: $R_3 = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}33}{0{,}5 + 0{,}33} = 0{,}188$ MΩ

Corrispondentemente le frequenze più elevate amplificate uniformemente risultano:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C X_c} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^{-10} \cdot 77 \cdot 10^3} = \frac{10^7}{483} = 20\,600 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^{-10} \cdot 143 \cdot 10^3} = \frac{10^7}{900} = 11\,000 \text{ Hz}$$

$$f_3 = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^{-10} \cdot 188 \cdot 10^3} = \frac{10^7}{1180} = 8300 \text{ Hz}$$

Problema 243. Un pentodo ($R_a = 1{,}5$ MΩ, $S = 1{,}3$ mA/V) ha un carico anodico $R_c = 200$ kΩ. La resistenza di griglia della valvola seguente è di 0,5 MΩ. Quale valore massimo può avere la capacità distribuita totale del circuito di accoppiamento affinchè alla frequenza di 50 kHz si abbia una riduzione dell'amplificazione al 70% di quella a 1000 Hz? Se la frequenza minima da amplificare, con una riduzione simile, è di 100 Hz quale valore dovrà avere la capacità del condensatore di accoppiamento intervalvolare?

Soluzione. Con il collegamento in parallelo della resistenza interna del pentodo, della resistenza di carico e della resistenza di fuga di griglia si ha una resistenza equivalente:

$$\frac{1{,}5 \cdot 0{,}2}{1{,}5 + 0{,}2} = 0{,}177 \text{ M}\Omega \quad \text{ed} \quad R_e = \frac{0{,}177 \cdot 0{,}5}{0{,}177 + 0{,}5} = \frac{0{,}088}{0{,}677} = 0{,}130 \text{ M}\Omega$$

Affinchè alla frequenza di 50 kHz si verifichi l'uguaglianza fra il valore di questa resistenza e quello della reattanza della capacità distribuita totale questa deve avere un valore di.

$$C_d = \frac{1}{2\pi f R_e} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 1{,}3 \cdot 10^5} = \frac{1}{40{,}82 \cdot 10^9} =$$

$$= 0{,}0245 \cdot 10^{-9} = 24{,}5 \text{ pF}$$

La capacità di accoppiamento intervalvolare dovrà avere un valore tale che la sua reattanza risulti uguale alla somma della resistenza di griglia in serie al parallelo della resistenza interna del pentodo e della sua resistenza di carico anodico.

Il parallelo di R_a ed R_c è:

$$\frac{1{,}5 \cdot 0{,}2}{1{,}5 + 0{,}2} = \frac{0{,}3}{1{,}7} = 0{,}17 \text{ M}\Omega$$

La resistenza totale è $0{,}5 + 0{,}17 = 0{,}67$ MΩ quindi alla frequenza di 100 Hz risulterà:

$$X_c = 0{,}67 \text{ M}\Omega$$

per cui:

$$C = \frac{1}{\omega X_c} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^2 \cdot 6{,}7 \cdot 10^5} = \frac{1}{42 \cdot 10^7} =$$

$$= 0{,}023 \cdot 10^{-7} = 0{,}0023 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 2300 \text{ pF}$$

Problema 244. Un pentodo 6AK5 ($S = 5$ mA/V, $R_a = 0{,}7$ MΩ) è accoppiato ad una valvola la cui resistenza di fuga di griglia è di 50 000 Ω. La capacità totale distribuita del circuito di accoppiamento è di 25 pF. Calcolare quale valore deve avere la resistenza di carico anodico per ottenere un'amplificazione di 15 alle frequenze medie. Qual è la frequenza massima amplificata uniformemente? Adoperando un triodo 6C5 ($S = 2$ mA/V ed $R_a = 10\,000$ Ω) quale valore deve avere il carico anodico per ottenere la stessa amplificazione e qual è la frequenza massima amplificata uniformemente se $C_d = 30$ pF?

Soluzione. Per la 6AK5 la resistenza di carico è ottenuta dalla:

$$A = S \cdot R_c$$

cioè:

$$15 = 0{,}005 \cdot R_c$$

da cui:

$$R_e = 15/0{,}005 = 3000\ \Omega$$

In parallelo a questo carico risultano la resistenza interna $R_a = 0{,}7\ \mathrm{M\Omega}$, di valore troppo elevato per influire sul suo valore e quella, di fuga di griglia $R_g = 50\,000\ \Omega$ che abbassa il carico effettivo a:

$$\frac{3 \cdot 50}{3 + 50}\ 10^3 = 2840\ \Omega$$

per cui la resistenza da porre realmente sull'anodo della valvola per realizzare un guadagno di 15 deve essere:

$$R_e = \frac{3000 \cdot 50\,000}{50\,000 - 3000} = 3200\ \Omega$$

In tal modo il valore della resistenza equivalente risulta di 3000 Ω. La frequenza massima a cui il guadagno si riduce al 70% è:

$$f = \frac{1}{2\,\pi\,C\,R_e} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 25 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^3} = 2{,}12\ \mathrm{MHz}$$

Per il triodo 6C5:

$$\mu = S\,R_a = 0{,}002 \cdot 10^4 = 20$$

Il valore della resistenza equivalente al parallelo della resistenza di fuga di griglia e della resistenza di accoppiamento si ricava da:

$$A = \mu\,\frac{R_e}{R_a + R_e}$$

da cui:

$$A\,(R_a + R_e) = \mu\,R_e;\ A\,R_a = \mu\,R_e - A\,R_e = R_e\,(\mu - A)$$

$$R_e = \frac{A\,R_a}{\mu - A} = \frac{15 \cdot 10^4}{20 - 15} = 30\,000\ \Omega$$

Dal parallelo si ricava il valore della resistenza da inserire come carico anodico:

$$R_c = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4} = \frac{15 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^4} = 7{,}5 \cdot 10^4 = 75\,000\ \Omega$$

e la frequenza massima uniformemente amplificata è:

$$f = \frac{1}{6{,}28 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^8}{56{,}4} = 178\ \mathrm{kHz}$$

Problema 245. Un pentodo amplificatore, fig. 112, con R_a elevatissima ed $S = 1$ mA/V, è accoppiato allo stadio seguente con i valori dei componenti indicati sullo schema. La capacità distribuita di tutto il circuito di accoppiamento è $C_d = 20$ pF. I componenti del circuito sono bene dimensionati per non influire sulla resa.

Disegnare la caratteristica di resa per le frequenze da 10 a 10 000 Hz e determinare la fase del segnale alle frequenze basse ed alte.

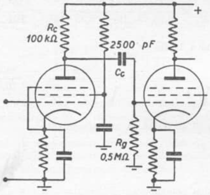


Fig. 112.

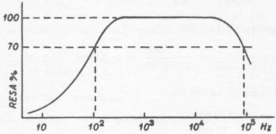


Fig. 113.

Soluzione. L'amplificazione alle frequenze intermedie è data da $A = SR$, in cui R ha il valore corrispondente al parallelo di R_c ed R_g:

$$R = \frac{10^5 \cdot 5 \cdot 10^5}{10^5 + 5 \cdot 10^5} = \frac{5 \cdot 10^{11}}{6 \cdot 10^5} = \frac{50 \cdot 10^4}{6} = 8{,}35 \cdot 10^4$$

$$A = 10^{-3} \cdot 8{,}35 \cdot 10^4 = 83{,}5$$

La frequenza più bassa, amplificata con una ampiezza ridotta al 70% ($-$ 3 dB) è:

$$f_1 = \frac{1}{2\,\pi\, C_c\,(R_g + R_c)} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^5} = \frac{10^4}{94} = 106 \text{ Hz}$$

La frequenza più elevata, amplificata con una ampiezza del 70%, è:

$$f_2 = \frac{1}{2\,\pi\, C_d\, R} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 2 \cdot 10^{-11} \cdot 8{,}35 \cdot 10^4} = \frac{10^7}{104} = 96\,000 \text{ Hz}$$

L'amplificazione a 10 Hz è:

$$A_b = \frac{A}{\sqrt{1 + \dfrac{f_1^2}{f^2}}} = \frac{83{,}5}{\sqrt{1 + \dfrac{106^2}{10^2}}} = \frac{83{,}5}{10{,}6} = 7{,}9$$

Alla frequenza di 10 Hz si ha uno sfasamento:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_1}{f} = \frac{106}{10} = 10{,}6 \qquad \varphi = \sim 84{,}5^\circ$$

Alla frequenza di 100 Hz:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{106}{100} = 1{,}06 \qquad \varphi = \sim 46{,}5^\circ$$

Alla frequenza di 1000 Hz:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{f}{f_2} = -\frac{1000}{96\,000} = -0{,}0104 \qquad \varphi = \sim -1^\circ$$

Alla frequenza di 10 000 Hz:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{10\,000}{96\,000} = -0{,}104 \qquad \varphi = \sim -6^\circ$$

Problema 246. Un triodo 6F5 ($\mu = 100$, $R_a = 66\,000\ \Omega$) è collegato con una impedenza di 100 H, come carico anodico, ed un condensatore di 0,05 μF alla griglia della valvola successiva, la cui resistenza di fuga è di 0,25 MΩ. Quale amplificazione si realizza a 1000 Hz?

Soluzione. La reattanza della bobina a 1000 Hz è:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 6{,}28 \cdot 10^5\ \Omega$$

Nella formula dell'amplificazione fornita da un triodo occorre introdurre come R_c l'impedenza equivalente al parallelo della reattanza della bobina sull'anodo e della resistenza di fuga di griglia (la reattanza di C_g è trascurabile a 1000 Hz):

$$Z_e = \frac{6{,}28 \cdot 10^5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5}{\sqrt{6{,}28^2 \cdot 10^{10} + 2{,}5^2 \cdot 10^{10}}} = \frac{15{,}7 \cdot 10^{10}}{10^5 \sqrt{45{,}65}} = 2{,}33 \cdot 10^5 \ \Omega$$

$$A = \mu \frac{Z_e}{\sqrt{R_a^2 + Z_e^2}} = 100 \frac{2{,}33 \cdot 10^5}{\sqrt{0{,}66^2 \cdot 10^{10} + 2{,}33^2 \cdot 10^{10}}} =$$

$$= 100 \frac{2{,}33 \cdot 10^5}{10^5 \sqrt{5{,}5}} = 100 \frac{2{,}33}{2{,}35} = 99$$

Problema 247. Un triodo ha una resistenza interna $R_a = 60$ kΩ ed un coefficiente di amplificazione $\mu = 30$. Il carico anodico può essere costituito da un resistore di 50 kΩ o da una bobina di 50 mH, con resistenza $R_s = 50$ Ω, collegata in parallelo ad un condensatore di 1000 pF. Determinare il valore della amplificazione fornita dalla valvola con il carico resistivo e quello ottenuto con il circuito oscillatorio alla sua frequenza di risonanza.

Soluzione. Con il carico resistivo di 50 kΩ si ha una amplificazione:

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} = 30 \frac{5 \cdot 10^4}{6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4} = \frac{150 \cdot 10^4}{11 \cdot 10^4} = 13{,}6$$

Il circuito oscillatorio ha una frequenza propria di risonanza:

$$f = \frac{1}{6{,}28 \sqrt{5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-9}}} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^{-5} \sqrt{0{,}5}} = \frac{10^5}{6{,}28 \cdot 0{,}71} = 22\,471 \text{ Hz}$$

La pulsazione ha il valore:

$$\omega = 2 \pi f = 6{,}28 \cdot 22\,471 = 1{,}41 \cdot 10^5$$

La resistenza dinamica del circuito è:

$$R_p = \frac{\omega^2 L^2}{R_s} = \frac{(1{,}41 \cdot 10^5)^2 (5 \cdot 10^{-2})^2}{50} = 10^6$$

quindi l'amplificazione è:

$$A = \frac{\mu R_p}{R_a + R_p} = \frac{30 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^4 + 10^6} = \frac{3 \cdot 10^7}{1{,}06 \cdot 10^6} = \frac{30}{1{,}06} = 28{,}3$$

Problema 248. Alla griglia di un triodo sono collegati un condensatore di 500 pF ed una resistenza di 0,5 MΩ. Sull'anodo è inserita, come carico anodico, una bobina di 100 mH. Applicando fra condensatore e massa una tensione $V_e = 1$ V a 2500 Hz, quale tensione risulta sulla griglia e quale tensione di uscita si ottiene se il triodo ha un coefficiente di amplificazione $\mu = 25$ ed $R_a = 10\,000\ \Omega$?

Soluzione. Alla frequenza di 2500 Hz il condensatore di griglia ha una reattanza:

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = \frac{10^6}{7{,}85} = 1{,}27 \cdot 10^5\ \Omega$$

La tensione applicata alla griglia risulta:

$$V_g = V_e \frac{R_g}{\sqrt{X_c^2 + R_g^2}} = 1 \frac{5 \cdot 10^5}{\sqrt{1{,}27^2 \cdot 10^{10} + 25 \cdot 10^{10}}} = \frac{5 \cdot 10^5}{10^5 \sqrt{26{,}6}} =$$

$$= \frac{5}{5{,}17} = 0{,}97\ \text{V}$$

La reattanza della bobina costituente il carico anodico è:

$$X_L = 2\pi f L = 6{,}28 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 1570\ \Omega$$

e l'amplificazione:

$$A = \mu \frac{X_L}{\sqrt{R_a^2 + X_L^2}} = 25 \frac{1{,}57 \cdot 10^3}{\sqrt{10^8 + 2{,}47 \cdot 10^6}} = 25 \frac{1{,}57 \cdot 10^3}{10^3 \sqrt{102{,}4}} =$$

$$= 25 \frac{1{,}57}{10{,}1} = 3{,}87$$

La tensione di uscita è di 3,75 V.

Problema 249. Un triodo, accoppiato a resistenza capacità con una valvola amplificatrice precedente, ha una resistenza di fuga di griglia di 0,5 MΩ ed è polarizzato con una batteria di 4 V. Sull'anodo della valvola amplificatrice precedente si ha una tensione di 100 V ed il condensatore di accoppiamento fra questo e la griglia del triodo ha un isolamento di 25 MΩ Qual è la tensione di polarizzazione realmente applicata alla griglia del triodo?

Soluzione. La resistenza d'isolamento del condensatore e quella di fuga di griglia risultano in serie fra loro e la tensione anodica della prima valvola, in opposizione a quella di polarizzazione di griglia, si ripartisce su di esse. Nel circuito scorre una corrente:

$$I = \frac{100 - 4}{25 \cdot 10^6 + 0{,}5 \cdot 10^6} = \frac{96}{25{,}5 \cdot 10^6} = 3{,}75 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{A} = 3{,}75\ \mu\mathrm{A}$$

che provocherà sulla resistenza di fuga di griglia una caduta di tensione positiva:

$$V = 3{,}75 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 10^6 = 1{,}88\ \mathrm{V}$$

La polarizzazione effettivamente applicata alla griglia è di:

$$-\ 4 + 1{,}88 = -\ 2{,}12\ \mathrm{V}$$

Problema 250. Un trasformatore ad audiofrequenza intervalvolare ha una induttanza incrementale del primario di 100 H. In corrispondenza a quale frequenza la resa si riduce al 70% se la valvola, di cui il primario costituisce il carico anodico, ha $R_a = 10\ 000\ \Omega$? Calcolare il valore di R_a che deve avere la valvola perchè la resa si riduca al 70% a 50 Hz. Per mantenere la valvola con $R_a = 10\ 000\ \Omega$ quale induttanza deve avere il primario del trasformatore intervalvolare, per ottenere una riduzione della resa al 70% a 50 Hz?

Soluzione. La frequenza a cui la resa si riduce al 70%, rispetto alla resa massima a 1000 Hz, è quella per cui si verifica $X_L = R_a$, cioè:

$$f = \frac{R_a}{2\pi L} = \frac{10\ 000}{6{,}28 \cdot 100} = 15{,}9\ \mathrm{Hz}$$

Perchè la resa si riduca al 70% a 50 Hz il primario del trasformatore va inserito come carico anodico di una valvola con resistenza interna:

$$R_a = \omega L = 6{,}28 \cdot 50 \cdot 100 = 31\ 400\ \Omega$$

Per una valvola, con $R_a = 10\ 000\ \Omega$, la resa si riduce al 70% a 50 Hz se l'induttanza del primario è:

$$L = \frac{R_a}{2\pi f} = \frac{10\ 000}{6{,}28 \cdot 50} = 31{,}8\ \mathrm{H}$$

Problema 251. Un triodo, con $R_a = 10\ 000$, deve essere accoppiato ad una valvola successiva a mezzo di un trasformatore con rapporto 1 : 3. Si desidera ottenere una resa uniforme tra 70 e 10 000 Hz (+ 10%, − 30%). Quali valori debbono avere l'induttanza del primario e l'induttanza di dispersione, se la frequenza di risonanza in serie del secondario deve avvenire a 7000 Hz? Si trascurino le resistenze degli avvolgimenti; la capacità d'ingresso della valvola successiva è di 65 pF e quella distribuita del secondario di 200 pF.

Soluzione. La riduzione della resa al 70% deve avvenire a 70 Hz; ad essa deve verificarsi:

$$X_L = 10\,000\ \Omega$$

cioè:

$$L = \frac{10\,000}{6{,}28 \cdot 70} = 22{,}7\ \text{H}$$

Per ottenere che il circuito oscillatorio, costituito dall'induttanza di dispersione del secondario con la capacità totale in parallelo, abbia un $Q = 1$, in modo che il picco di risonanza risulti appena accennato, occorre che:

$$L_d = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2\,C} = \frac{1}{39{,}6 \cdot 49 \cdot 10^6 \cdot 265 \cdot 10^{-12}} = \frac{10}{5{,}14} = 1{,}92\ \text{H}$$

$$R_s = \frac{\omega\,L_d}{Q} = \frac{6\,28 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 1{,}92}{1} = 84\,400\ \Omega$$

Questo ultimo risultato può essere ottenuto adoperando per una parte dell'avvolgimento secondario del filo di resistenza.

Problema 252. Un trasformatore serve di accoppiamento fra una linea di 600 Ω e la griglia della prima valvola di un amplificatore. Quale deve essere la minima induttanza del primario del trasformatore affinchè la resa a 80 Hz non risulti inferiore al 70% della resa alle frequenze medie? Quale potrà essere il rapporto di trasformazione?

Soluzione. Il primario risulta in serie ad una resistenza di 600 Ω, qual è quella presentata dalla linea, è necessario perciò che la reattanza del primario risulti uguale o maggiore di 600 Ω ad 80 Hz e pertanto la sua induttanza minima è:

$$L = \frac{600}{6{,}28 \cdot 80} = \frac{600}{500} = 1{,}2\ \text{H}$$

Il massimo carico che si può ritenere riflesso sul secondario del trasformatore è di 100 000 Ω ma è preferibile mantenere questo valore circa a metà, cioè a 50 000 Ω, per cui il rapporto risulta:

$$n = \sqrt{\frac{50\,000}{600}} = \sqrt{83{,}5} = 9{,}12$$

Problema 253. In uno stadio amplificatore a resistenza capacità con trasformatore, come quello di fig. 114, si vuol far risuonare il circuito *CP*, in serie, ad una frequenza di 20 Hz, per favorire un aumento della resa alle frequenze basse. Si calcolino i valori di C necessari per valori dell'induttanza del primario di 10, 20, 30, 50, 75 e 100 H.

Soluzione.

Per 10 H: $$C = \frac{0{,}02533}{f^2 L} = \frac{2533 \cdot 10^{-5}}{400 \cdot 10} = 6{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 6{,}3\ \mu\text{F}$$

Per 20 H: $$C = \frac{2533 \cdot 10^{-5}}{400 \cdot 20} = 3{,}16\ \mu\text{F}$$

Per 30 H: $$C = \frac{2533 \cdot 10^{-5}}{400 \cdot 30} = 2{,}11\ \mu\text{F}$$

Per 50 H: $$C = \frac{2533 \cdot 10^{-5}}{400 \cdot 50} = 1{,}26\ \mu\text{F}$$

Per 75 H: $$C = \frac{2533 \cdot 10^{-5}}{400 \cdot 75} = 0{,}84\ \mu\text{F}$$

Per 100 H: $$C = \frac{2533 \cdot 10^{-5}}{400 \cdot 100} = 0{,}63\ \mu\text{F}$$

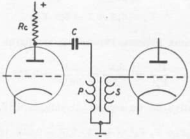


Fig. 114.

STADIO DI POTENZA

Problema 254. Un triodo di potenza, la cui tensione di alimentazione anodica è $V_b = 250$ V, ha una corrente anodica $I_{ao} = 28$ mA con una tensione di polarizzazione $V_g = -50$ V. La sua pendenza è di 2,2 mA/V. Quale sarà il valore della corrente anodica se si dà alla griglia una polarizzazione di — 40 V? Se la dissipazione anodica massima è di 12 W si può applicare senza danno questa polarizzazione?

Soluzione. Dalla formula relativa alla pendenza:

$$S = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g}$$

si ha:

$$\Delta I_a = S \, \Delta V_g = 2{,}2 \cdot 10 = 22 \text{ mA}$$

Poichè la tensione di polarizzazione di griglia risulta ridotta, rispetto al valore iniziale, la corrente anodica è aumentata di 22 mA, portandosi a 50 mA. Il nuovo valore della dissipazione anodica a riposo è:

$$P = 250 \cdot 0{,}05 = 12{,}5 \text{ W}$$

potenza accettabile poichè supera di poco la massima dissipazione anodica.

Problema 255. Un pentodo a fascio 50L6, alimentato con $V_b = 110$ V e polarizzato con $V_g = -7{,}5$ V, eroga la potenza massima $P_u = 2{,}1$ W. Quale risulta la sua sensibilità di potenza? Quale potenza si ottiene quando il segnale d'ingresso risulta $V_e = 0{,}5$ V?

Soluzione. Alla griglia va applicata una tensione efficace:

$$V_e = 7{,}5 \cdot 0{,}7 = 5{,}3 \ V_{eff}$$

per ottenere la massima potenza. Pertanto la sensibilità di potenza:

$$S_p = \frac{P_u}{V_e^2} = \frac{2{,}1}{5{,}3^2} = \frac{2{,}1}{28{,}1} = 0{,}075 \text{ mho}$$

La potenza relativa ad un segnale di entrata di 0,5 V è:

$$P = S_p \, V_e^2 = 0{,}075 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}019 \text{ W}$$

Problema 256. Un pentodo di potenza è alimentato con $V_b = 180$ V ed ha una corrente anodica $I_{a0} = 30$ mA. Quale valore dovrà avere approssimativamente il suo carico anodico? Se su questo carico la componente alternata della tensione anodica risulta $V_u = 140$ V efficaci, quali sono la potenza di uscita ed il rendimento ottenuti? Se la tensione alternata applicata alla griglia è ridotta a metà, quali sono i nuovi valori della potenza di uscita e del rendimento?

Soluzione. Per un pentodo il carico anodico ottimo risulta approssimativamente:

$$R_c = \frac{V_a}{I_a} = \frac{180}{30} = 6\ \mathrm{k\Omega}$$

da cui si detrarrà, per una maggiore approssimazione, il 10%:

$$R_c = 6 - 0{,}6 = 5{,}4\ \mathrm{k\Omega}$$

La tensione sull'anodo raggiunge un valore massimo di 140 V, per cui la potenza sul carico è:

$$P_u = \frac{V_u^2}{R_c} = \frac{140^2}{5{,}4 \cdot 10^3} = \frac{19\,6 \cdot 10^3}{5{,}4 \cdot 10^3} = 3{,}64\ \mathrm{W}$$

La potenza dissipata sull'anodo della valvola, senza segnale sulla griglia, è:

$$P_o = V_b\, I_a = 180 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 5{,}4\ \mathrm{W}$$

quindi il rendimento risulta:

$$\eta = \frac{P_u}{P_o} = \frac{3{,}64}{5{,}4} = 0{,}66 = 66\%$$

Poichè la tensione di uscita può ritenersi proporzionale alla tensione di entrata, riducendo a metà quest'ultima si ha sull'anodo una tensione di uscita:

$$P = \frac{70^2}{5{,}4 \cdot 10^3} = \frac{4{,}9 \cdot 10^3}{5{,}4 \cdot 10^3} = 0{,}91\ \mathrm{W}$$

Il rendimento, in queste condizioni, è:

$$\eta = \frac{0{,}91}{5{,}4} = 0{,}17 = 17\%\ \text{circa}$$

Problema 257. Un triodo di potenza 6A3 (caratteristiche anodiche in figura 144) è adoperato con $V_b = 250$ V, $V_g = -30$ V. Alla sua griglia è applicato un segnale il cui valore massimo è $V_e = 30$ V. Adottando i seguenti valori per R_c: 500, 1500 e 3000 Ω si determini il valore della corrente anodica di riposo, della potenza di uscita e della distorsione di seconda armonica.

Soluzione. Per la tracciatura delle tre rette di carico si determinano anzitutto i valori delle correnti corrispondenti ai soli carichi:

$$I_1 = 250/500 = 0{,}5\ \mathrm{A}$$
$$I_2 = 250/1500 = 0{,}167\ \mathrm{A}$$
$$I_3 = 250/3000 = 0{,}084\ \mathrm{A}$$

Si collegano i punti sull'asse delle ordinate, corrispondenti a questi valori, con il punto a 250 V della tensione di alimentazione anodica, costruendo così le tre rette di carico da cui si rilevano i tre valori della corrente anodica di riposo con le intersezioni con la caratteristica $V_g = -30$ V:

$$I_{a1} = 83 \text{ mA}$$
$$I_{a2} = 45 \text{ mA}$$
$$I_{a3} = 28 \text{ mA}$$

Dalle intersezioni delle rette di carico con le caratteristiche $V_g = 0$ e $V_g = -60$ V si ottengono:

$$I_{1\,max} = 203 \text{ mA} \quad I_{1\,min} = 6 \text{ mA} \quad V_{1\,max} = 248 \text{ V} \quad V_{1\,min} = 150 \text{ V}$$
$$I_{2\,max} = 102 \text{ mA} \quad I_{2\,min} = 5 \text{ mA} \quad V_{2\,max} = 242 \text{ V} \quad V_{2\,min} = 95 \text{ V}$$
$$I_{3\,max} = 62 \text{ mA} \quad I_{3\,min} = 4{,}5 \text{ mA} \quad V_{3\,max} = 240 \text{ V} \quad V_{3\,min} = 68 \text{ V}$$

A mezzo della formula:

$$P_u = \frac{(I_{max} - I_{min})\,(V_{max} - V_{min})}{8}$$

$$P_1 = \frac{(203 - 6)\,10^{-3}\,(248 - 150)}{8} = \frac{197 \cdot 98 \cdot 10^{-3}}{8} = \frac{19{,}3}{8} = 2{,}41 \text{ W}$$

$$P_2 = \frac{(102 - 5)\,10^{-3}\,(242 - 95)}{8} = \frac{97 \cdot 147 \cdot 10^{-3}}{8} = \frac{14{,}26}{8} = 1{,}78 \text{ W}$$

$$P_3 = \frac{(62 - 4{,}5)\,10^{-3}\,(240 - 68)}{8} = \frac{57{,}5 \cdot 172 \cdot 10^{-3}}{8} = \frac{9{,}9}{8} = 1{,}24 \text{ W}$$

La percentuale della seconda armonica presente sui tre carichi risulta a mezzo della formula:

$$d = \frac{0{,}5\,(I_{max} + I_{min}) - I_{ao}}{I_{max} - I_{min}}$$

$$d_1 = \frac{0{,}5\,(203 + 6) - 83}{203 - 6} = \frac{21{,}5}{197} = 0{,}11 = 11\% \text{ per il carico di } 500\ \Omega$$

$$d_2 = \frac{0{,}5\,(102 + 5) - 45}{102 - 5} = \frac{8{,}5}{97} = 0{,}088 = 8{,}8\% \text{ per il carico di } 1500\ \Omega$$

$$d_3 = \frac{0{,}5\,(62 + 4{,}5) - 28}{62 - 4{,}5} = \frac{5{,}25}{57{,}5} = 0{,}091 = 9{,}1\% \text{ per il carico di } 3000\ \Omega$$

Problema 230. Quale rapporto deve avere il trasformatore di accoppiamento fra l'anodo di un triodo ($\mu = 10$ ed $S = 3$ mA/V) e la bobina mobile di un altoparlante con resistenza di 3,2 Ω?

Soluzione. Il valore ottimo della resistenza di carico di un triodo deve essere doppio di quello della resistenza interna della valvola. Questa ha il valore:

$$R_a = \frac{\mu}{S} = \frac{10}{0{,}003} = 3{,}3 \text{ k}\Omega$$

quindi il carico ottimo risulta $R_c = 6{,}6$ kΩ.

Il rapporto di trasformazione deve essere:

$$n = \sqrt{\frac{Z_p}{Z_s}} = \sqrt{\frac{6600}{3{,}2}} = \sqrt{2060} = 45{,}5$$

Problema 259. Un resistore di 5000 Ω è collegato in parallelo al primario del trasformatore di uscita di un radioricevitore. Con un adatto voltmetro si misura la tensione risultante su di esso, ch'è di 15,8 V. Qual è la potenza dissipata nella resistenza (potenza di uscita del ricevitore, se la bobina mobile dell'altoparlante è distaccata dal secondario del trasformatore)?

Soluzione. La potenza:

$$P = V^2/R = 15{,}8^2/5000 = 250/5000 = 0{,}05 \text{ W} = 50 \text{ mW}$$

Questa è la potenza normale richiesta all'uscita di un ricevitore durante le prove di collaudo.

Problema 260. Un pentodo di potenza ($R_a = 50\,000$ Ω, $\mu = 160$, $V_g = -10$ V) ha un carico anodico di 5000 Ω. La bobina mobile dell'altoparlante, collegata al secondario del trasformatore di uscita, ha un'impedenza di 3,2 Ω; quale tensione si ha su questa bobina se quella applicata alla griglia del pentodo è di 2 V? Qual è la potenza fornita all'altoparlante?

Soluzione. L'amplificazione ottenuta dalla valvola con il carico suddetto è:

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} = 160 \frac{5 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^3} = 0{,}09 \cdot 160 = 14{,}4$$

La tensione alternata sul primario del trasformatore di uscita è:

$$V_a = A\, V_e = 14{,}4 \cdot 2 = 28{,}8 \text{ V}$$

Il trasformatore ha un rapporto, in discesa, di:

$$n = \sqrt{\frac{Z_p}{Z_s}} = \sqrt{\frac{5000}{3,2}} = \sqrt{1562} = 39,6$$

per cui la tensione sul secondario è:

$$V_s = \frac{V_a}{n} = \frac{28,8}{39,6} = 0,72 \text{ V}$$

e la potenza fornita da questo alla bobina mobile è:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{0,72^2}{3,2} = \frac{0,51}{3,2} = 0,16 \text{ W}$$

Problema 261. Con quale tensione alternata efficace, applicata alla propria griglia controllo, un pentodo EL3 fornisce la massima potenza su di un carico di 7000 Ω? Quale valore ha questa potenza? Quale sarà, in corrispondenza ad essa, il valore della tensione sul secondario del trasformatore collegato ad una bobina mobile di 3,2 Ω?

Il pentodo è alimentato a 250 V ed ha una polarizzazione $V_g = -6$ V. Riferirsi alle caratteristiche anodiche di fig. 146.

Soluzione. Poichè è polarizzata a -6 V la massima tensione che può essere applicata alla griglia della EL3 è di 6 V, cioè 4,2 V efficaci: corrispondentemente ad essa si ottiene la massima potenza. Con un carico di 7000 Ω questa ha il valore:

$$P = \frac{\Delta I_a \cdot \Delta V_a}{8} = \frac{(0,070 - 0,005)(470 - 20)}{8} = 3,65 \text{ W}$$

Il trasformatore deve avere un rapporto:

$$n = \sqrt{\frac{Z_p}{Z_s}} = \sqrt{\frac{7000}{3,2}} = \sqrt{2180} = 46,8$$

La tensione alternata massima ottenuta sul suo primario è di $450/2 = 225$ V a cui corrisponde una tensione efficace di $225/1,41 = 160$ V. La tensione efficace sul secondario è $V_s = 160/46,8 = 3,42$ V.

Problema 262. Calcolare i rapporti che deve avere un trasformatore di uscita quando il carico che deve offrire il primario è di 5000 Ω se al secondario si collega la bobina mobile di un altoparlante con resistenza di 2,5 o di 5 o di

7,5 o di 10 Ω. Se il primario è avvolto con 2500 spire quante ne occorrono per le varie prese sul secondario?

Soluzione.

$$n_1 = \sqrt{\frac{Z_p}{Z_s}} = \sqrt{\frac{5000}{2,5}} = 44,7 \qquad \frac{2500}{44,7} = 56 \text{ spire}$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{5000}{5}} = 31,6 \qquad \frac{2500}{31,6} = 79 \text{ spire}$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{5000}{7,5}} = 25,8 \qquad \frac{2500}{25,8} = 97 \text{ spire}$$

$$n_4 = \sqrt{\frac{5000}{10}} = 22,4 \qquad \frac{2500}{22,4} = 111 \text{ spire}$$

Si inizia l'avvolgimento del secondario con 56 spire, lo si continua fino alla 79ª, quindi fino alla 97ª ed alla 111ª spira.

Problema 263. Calcolare il trasformatore di uscita di un amplificatore da 25 W per un impianto di un cinema con tre altoparlanti, di cui due da 10 W ed uno da 5 W. I due altoparlanti da 10 W hanno le bobine mobili con impedenza di 12 Ω, quella dell'altoparlante più piccolo di 2,5 Ω. Il carico riflesso sul primario deve essere di 10 000 Ω.

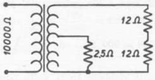


Fig. 115.

Soluzione. I due altoparlanti da 10 W possono essere collegati in parallelo o in serie: questo secondo metodo conviene data la lunga linea di collegamento. Essi rappresentano un carico di 24 Ω che richiede una potenza di 20 W sui 25 resi dall'amplificatore. Per essi il trasformatore deve presentare un rapporto:

$$\frac{N_p}{N_1} = \sqrt{\frac{R_p}{R_1}\,\frac{P_p}{P_1}} = \sqrt{\frac{10\,000}{24}\,\frac{25}{20}} = \sqrt{416 \cdot 1,25} = \sqrt{520} = 22,8$$

e per l'altoparlante piccolo:

$$\frac{N_p}{N_2} = \sqrt{\frac{10\,000}{2,5}\,\frac{25}{5}} = \sqrt{4000 \cdot 5} = \sqrt{20\,000} = 142$$

Se il primario del trasformatore è avvolto con 2800 spire l'avvolgimento secondario per gli altoparlanti di sala è di 123 spire di 0,65 mm (per erogare 0,91 A sul carico di 24 Ω); quello per l'altoparlante di cabina sarà di 20 spire di 0,80 (per erogare 1,4 A sul carico di 2,5 Ω).

Problema 264. Tre altoparlanti, con bobine mobili di 7,5, 15 e 3,2 Ω richiedono rispettivamente una potenza di 15, 10 e 2 W. Essi vanno collegati ad una linea a 500 Ω: quali rapporti debbono avere i rispettivi trasformatori di adattamento per non alterare il carico sulla linea e per fornire ad ogni altoparlante la massima potenza?

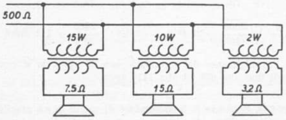


Fig. 116.

Soluzione. La potenza totale da fornire alla linea è di 27 W. Il primo altoparlante richiede 15/27 di essa e l'impedenza del primario del suo trasformatore deve essere:

$$Z_p = \frac{27}{15} \cdot 500 = 900 \ \Omega \quad \text{ed} \quad n = \sqrt{\frac{900}{7,5}} = 11$$

Il secondo altoparlante richiede 10/27 della potenza e:

$$Z_p = \frac{27}{10} \cdot 500 = 1350 \ \Omega \quad \text{ed} \quad n = \sqrt{\frac{1350}{15}} = 9,5$$

Il terzo altoparlante richiede 2/27 della potenza e:

$$Z_p = \frac{27}{2} \cdot 500 = 6750 \ \Omega \quad \text{ed} \quad n = \sqrt{\frac{6750}{3,2}} = 46$$

Problema 265. Un trasformatore di uscita di un amplificatore ha il secondario con le prese corrispondenti alle seguenti impedenze: 2,5-5-7,5-10-15 Ω. Quali valori di impedenza risultano collegando il carico fra le coppie di morsetti 2,5-5 e fra 5-7,5?

Soluzione. L'impedenza fra due prese di un secondario a prese multiple è data dalla formula seguente, in cui Z_a è l'impedenza alta, Z_b quella bassa:

$$Z = Z_b\left(\sqrt{\frac{Z_a}{Z_b}} - 1\right)^2 = 2{,}5\left(\sqrt{\frac{5}{2{,}5}} - 1\right)^2 = 2{,}5 \cdot 0{,}168 = 0{,}42\ \Omega$$

$$Z = 5\left(\sqrt{\frac{7{,}5}{5}} - 1\right)^2 = 5 \cdot 0{,}048 = 0{,}24\ \Omega$$

Problema 266. Un altoparlante elettromagnetico ha l'avvolgimento con induttanza di 1 H e resistenza di 2000 Ω. In serie ad esso è collegato un condensatore di 2 μF. Questo circuito è inserito fra i morsetti di un generatore, con resistenza interna di 4000 Ω. Se la f. e. m. è di 100 V a 1000 Hz quale valore ha la tensione sull'altoparlante? Quale quella sul condensatore? Quale valore ha la potenza fornita all'altoparlante?

Soluzione. Occorre determinare l'impedenza totale del circuito, comprendente il generatore, per determinare la corrente:

$$X_L = 6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 1 = 6280\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^3}{12{,}5} = 80\ \Omega$$

$$Z_t = \sqrt{R_a^2 + R_g^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4 \cdot 10^6 + 16 \cdot 10^6 + (6280 - 80)^2} =$$

$$= \sqrt{59{,}3 \cdot 10^6} = 7700\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{7700} = 0{,}013\ \text{A}$$

L'impedenza dell'altoparlante è:

$$Z_a = \sqrt{4 \cdot 10^6 + 39 \cdot 10^6} = 10^3\sqrt{43} = 6550\ \Omega$$

La tensione ai suoi morsetti è:

$$V_a = 6550 \cdot 0{,}013 = 85{,}2\ \text{V}$$

e quella fra le armature del condensatore:

$$V_C = 80 \cdot 0{,}013 = 1\ \text{V}$$

La potenza fornita all'altoparlante:

$$P_a = 85{,}2 \cdot 0{,}013 = 1{,}1\ \text{W}$$

Problema 267. Nel problema precedente facendo produrre al generatore una f. e. m. di 100 V, in tutta la gamma di frequenze audio, a quale frequenza la corrente nell'altoparlante è massima? Qual è il valore di questa corrente?

Quali i valori delle tensioni sul condensatore e sull'altoparlante? Quale valore ha la potenza fornita a quest'ultimo?

Soluzione. La frequenza di risonanza del circuito costituito dall'altoparlante e dal condensatore è:

$$f_o = \frac{1}{6{,}28\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = \frac{10^3}{6{,}28\sqrt{2}} = \frac{1000}{8{,}85} = 113 \text{ Hz}$$

In tale condizione la corrente è limitata solo dalla resistenza totale del circuito:

$$I = \frac{100}{6000} = 0{,}0166 \text{ A}$$

La reattanza dell'altoparlante è:

$$X_a = 6{,}28 \cdot 113 \cdot 1 = 708 \ \Omega$$

La tensione presente fra i suoi morsetti:

$$V_a = Z_a I = \sqrt{2000^2 + 708^2} \cdot 0{,}0166 = 2140 \cdot 0{,}0166 = 35{,}5 \text{ V}$$

Per il condensatore:

$$X_C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 113 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{1416} = 708 \ \Omega$$

e:

$$V_C = 708 \cdot 0{,}0166 = 11{,}75 \text{ V}$$

Infine:

$$P_a = 35{,}5 \cdot 0{,}0166 = 0{,}56 \text{ W}$$

Problema 268. Un amplificatore è costituito da un triodo EBC3, accoppiato a resistenza capacità con il pentodo finale EL3. Disegnare lo schema con i valori di tutti i componenti del circuito. La tensione di alimentazione anodica dell'amplificatore è $V_b = 250$ V. La EL3 ha le seguenti caratteristiche: $I_a = 36$ mA; $I_{gs} = 4$ mA; $V_g = -6$ V; $S = 9$ mA/V; $R_c = 7000$ Ω. La EBC3 ha le seguenti caratteristiche: $I_{ao} = 5$ mA; $V_g = -4$ V; $\mu = 30$; $R_a = 15\,000$ Ω. Dalla EBC3 si deve ottenere un'amplificazione tale che con $V_e = 0{,}2$ V efficaci si ottenga la massima potenza dalla finale. La gamma di frequenze che interessa amplificare è quella relativa alle trasmissioni radio. La impedenza della bobina mobile dell'altoparlante è di 2,5 Ω.

Soluzione. Poichè la massima tensione che può essere applicata alla griglia del pentodo finale è:

$$6 \cdot 0{,}7 = 4{,}2 \text{ V}_{eff}$$

la EBC3 deve fornire un'amplificazione di almeno:

$$4{,}2/0{,}2 = 21 \text{ volte}$$

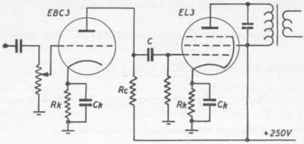


Fig. 117.

Pertanto la resistenza di carico anodico deve risultare:

$$A = 21 = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} = 30 \frac{R_c}{1{,}5 \cdot 10^4 + R_c}$$

da cui:

$$21\,(1{,}5 \cdot 10^4 + R_c) = 30\ R_c$$

$$31{,}5 \cdot 10^4 + 21\ R_c = 30\ R_c$$

$$30\ R_c - 21\ R_c = 31{,}5 \cdot 10^4$$

$$R_c = \frac{31{,}5 \cdot 10^4}{9} = 3{,}5 \cdot 10^4\ \Omega$$

Con un tale valore del carico anodico la retta di carico va tracciata fra 7,2 mA e 250 V, fig. 142. Alla griglia può essere applicata una polarizzazione di -4 V e, poichè la corrente anodica risulta di 2,5 mA, la resistenza catodica avrà il valore:

$$R_k = \frac{4}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} = 1{,}6\ \text{k}\Omega$$

Poichè la gamma di frequenze da amplificare inizia a 100 Hz, il condensatore catodico avrà una capacità minima di:

$$C_k = \frac{10}{2\,\pi\, f\, R_k} = \frac{10}{628 \cdot 1600} = \frac{10}{10^6} = 10^{-5}\ \text{F} = 10\ \mu\text{F}$$

Per completare lo stadio preamplificatore si farà uso di un regolatore di volume, costituito da un potenziometro logaritmico da 0,5 MΩ e da un condensatore d'ingresso che avrà una capacità uguale a quella del condensatore intervalvolare, anch'esso seguito da una resistenza di fuga di griglia di 0,5 MΩ. Questo condensatore avrà una capacità minima data da:

$$C = \frac{1}{2\pi f R_e} = \frac{1}{628 \cdot 5{,}1 \cdot 10^5} = 0{,}00031 \cdot 10^{-5}\ \text{F} = 3100\ \text{pF}$$

La resistenza catodica della EL3 avrà il valore:

$$R_k = \frac{V_g}{I_{ao} + I_{gs}} = \frac{6}{(36+4)\,10^{-3}} = 150\ \Omega$$

ed il relativo condensatore catodico una capacità minima:

$$C_k = \frac{10}{628 \cdot 150} = 1{,}07 \cdot 10^{-4}\ \text{F} = 107\ \mu\text{F}$$

Il rapporto del trasformatore di uscita deve essere di:

$$n = \sqrt{\frac{Z_p}{Z_s}} = \sqrt{\frac{7000}{2{,}5}} = 53$$

Il condensatore in parallelo al primario del trasformatore di uscita, necessario per ottenere un carico più costante sul pentodo con l'aumentare della frequenza da amplificare, può avere una capacità di circa 3000 pF.

CONTROREAZIONE

Problema 269. Se in un amplificatore di tensione a due stadi, con amplificazione $A = 900$, si verifica una riduzione della tensione di alimentazione anodica del 10% si ha corrispondentemente una riduzione del 25% dell'amplificazione. Se si introduce una controreazione con $\beta = 0{,}005$ quale variazione si ha nell'amplificazione per la stessa variazione di tensione?

Soluzione. Facendo uso della controreazione si ottiene un'amplificazione:

$$A_r = \frac{A}{1 + \beta A} = \frac{900}{1 + 0{,}005 \cdot 900} = \frac{900}{5{,}5} = 164$$

Poichè al diminuire della tensione anodica si ha una riduzione dell'amplificazione da 900 a 900 − 25% = 675, con la controreazione questa riduzione risulterà:

$$\frac{675}{1 + 0{,}005 \cdot 675} = \frac{675}{4{,}38} = 154$$

Con la controreazione si ha una variazione percentuale del:

$$\frac{164 - 154}{164} \cdot 100 = \frac{10}{164} \cdot 100 = 0{,}06 \cdot 100 = 6\%$$

Problema 270. In un amplificatore si introduce la controreazione, collegando, a mezzo di una resistenza R_r, la griglia del secondo stadio con quella del primo. La prima valvola è una EBC3, triodo con $\mu = 30$ ed $R_a = 15\,000\ \Omega$. Per le resistenze di fuga di griglia sono stati adoperati due resistori $R_g = 0{,}5\ \text{M}\Omega$; per il carico anodico $R_c = 60\,000\ \Omega$; per il condensatore di accoppiamento intervalvolare $C = 5000$ pF. Adottando un valore di $R_r = 5\ \text{M}\Omega$, determinare i valori dell'amplificazione fornita dalla EBC3 a 500, 100 e 20 Hz, senza e con controreazione.

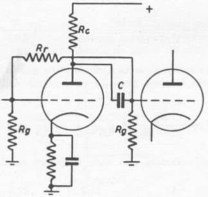


Fig. 118.

Soluzione. Si determina anzitutto la reattanza di C alle tre frequenze:

a 500 Hz $\quad X_C = \dfrac{1}{3140 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = \dfrac{10^9}{15\,700} = 64\,000\ \Omega = 0{,}64 \cdot 10^5\ \Omega$

a 100 Hz $\quad X_C = \dfrac{1}{628 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = \dfrac{10^9}{3140} = 318\,000\ \Omega = 3{,}18 \cdot 10^5\ \Omega$

a 20 Hz $\quad X_C = \dfrac{1}{125 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = \dfrac{10^9}{628} = 1\,590\,000\ \Omega = 15{,}9 \cdot 10^5\ \Omega$

L'amplificazione ottenuta senza la R_r (trascurando il parallelo della resistenza interna della valvola e della resistenza di carico, di valore piccolo rispetto alla R_g) è data da:

$$A = \mu \frac{R_c}{R_a + R_c} \frac{R_g}{Z}$$

a 500 Hz $$A = \frac{30 \cdot 6 \cdot 10^4}{1,5 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^4} \frac{5 \cdot 10^5}{\sqrt{25 \cdot 10^{10} + 0,41 \cdot 10^{10}}} =$$

$$= 24 \frac{5}{\sqrt{25 + 0,41}} = 24 \frac{5}{5,03} = 23,8$$

a 100 Hz $$A = 24 \frac{5 \cdot 10^5}{\sqrt{25 \cdot 10^{10} + 10,1 \cdot 10^{10}}} = 24 \frac{5}{59,2} = 20,3$$

a 20 Hz $$A = 24 \frac{5 \cdot 10^5}{\sqrt{25 \cdot 10^{10} + 252 \cdot 10^{10}}} = 24 \frac{5}{16,7} = 7,2$$

Inserendo la resistenza R_r si ha il rinvio, sulla griglia della prima valvola, di una frazione della tensione presente sulla griglia della seconda, frazione data da:

$$\beta = \frac{R_g}{R_g + R_r} = \frac{0,5}{0,5 + 5} = \frac{0,5}{5,5} = 0,09$$

L'amplificazione realizzata alle varie frequenze risulta:

a 500 Hz $$A_r = \frac{A}{1 + \beta A} = \frac{23,8}{1 + 23,8 \cdot 0,09} = \frac{23,8}{3,14} = 7,6$$

a 100 Hz $$A_r = \frac{20,3}{1 + 20,3 \cdot 0,09} = \frac{20,3}{2,82} = 7,2$$

a 20 Hz $$A_r = \frac{7,2}{1 + 7,2 \cdot 0,09} = \frac{7,2}{1,645} = 4,35$$

Problema 271. La distorsione totale prodotta da un pentodo amplificatore finale è del 10%, corrispondentemente alla massima potenza di uscita, a cui corrisponde un'amplificazione di 15. Per ridurre al 2% questa distorsione quale grado di controreazione va applicato allo stadio finale?

Soluzione. La riduzione di distorsione ottenuta con l'introduzione della controreazione di tensione è data da:

$$d_r = \frac{d}{1 + \beta A}$$

da cui:

$$d_r (1 + \beta A) = d$$

$$d_r + \beta d_r A = d \quad \text{e} \quad \beta d_r A = d - d_r$$

quindi:

$$\beta = \frac{d - d_r}{d_r A} = \frac{10 - 2}{2 \cdot 15} = \frac{8}{30} = 0{,}266$$

Problema 272. Di un ripetitore catodico, facente uso di un triodo, con $\mu = 50$ ed $S = 5$ mA/V, determinare la resistenza interna, R_{ar}, e l'amplificazione, A_r, ottenuta con una resistenza di carico di 1500 Ω.

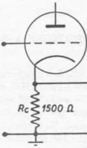


Fig. 119.

Soluzione. La resistenza interna della valvola risulta:

$$R_{ar} = \frac{1}{S} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{5} = 200\ \Omega$$

L'amplificazione, ottenuta con un carico di 1500 Ω è:

$$A_r = \frac{S R_c}{1 + S R_c} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3} = \frac{7{,}5}{8{,}5} = 0{,}88$$

Problema 273. Un tetrodo a fascio 6AQ5 (o 6V6) è collegato, da triodo, come ripetitore catodico. Le sue caratteristiche sono: $S = 4$ mA/V; $\mu = 9,6$; $R_a = 2400\ \Omega$. Qual è la resistenza interna effettiva, R_{ar}? Quale amplificazione A_r e quale resistenza di uscita, R_u, si ottengono se la resistenza catodica è di 120 Ω?

Soluzione. La resistenza anodica risulta:

$$R_{ar} = \frac{1}{S} = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{4} = 250\ \Omega$$

L'amplificazione ottenuta è:

$$A_r = \frac{S\,R_c}{1 + S\,R_c} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 120}{1 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 120} = \frac{0,48}{1,48} = 0,325$$

La resistenza di uscita dello stadio è:

$$R_u = \frac{R_c}{1 + S\,R_c} = \frac{120}{1 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 120} = \frac{120}{1,48} = 81\ \Omega$$

AMPLIFICAZIONE A R. F.

Problema 274. Un pentodo 6BJ6 è adoperato come amplificatore a RF in un ricevitore per onde medie (500÷1600 kHz), con $V_b = 250$ V, $I_a = 9,2$ mA, $V_{gs} = 100$ V, $I_{gs} = 3,3$ mA, $V_g = -1$ V, $S = 3,6$ mA/V. Calcolare i valori della resistenza e del condensatore per la griglia schermo, della resistenza e del condensatore del gruppo catodico. Se il circuito anodico accordato presenta una resistenza dinamica $R_d = 1,1 \cdot 10^5\ \Omega$ quale amplificazione si realizza?

Soluzione. Il valore della resistenza in serie alla griglia schermo, per ridurre la tensione da 250 a 100 V, è:

$$R_s = 150/3,3 \cdot 10^{-3} = 45,5 \cdot 10^3\ \Omega$$

Per ottenere una buona stabilità della tensione di schermo, date le frequenze in giuoco, si può adoperare una capacità $C_s = 0,05\ \mu$F. Il valore della resistenza catodica, necessaria per ottenere 1 V di polarizzazione di griglia, è:

$$R_k = 1/(9,2 + 3,3)\, 10^{-3} = 1/12,5 \cdot 10^{-3} = 0,08 \cdot 10^3 = 80\ \Omega$$

Per C_k è sufficiente far uso di un condensatore di 0,1 μF.

Poichè il pentodo ha una resistenza interna molto elevata si può ritenere che R_a non abbia influenza sul Q del circuito, quindi l'amplificazione realizzata è:

$$A = S\,R_d = 3{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}1 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2 = 395$$

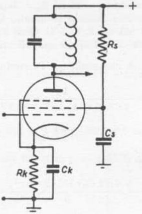


Fig. 120.

Problema 275. Un pentodo (con $S = 2{,}2$ mA/V ed $R_a = 0{,}5$ MΩ) è adoperato come amplificatore a RF, con un circuito anodico accordato a 500 kHz. Quest'ultimo è costituito da una bobina, con $L = 200$ μH ed $R_s = 5$ Ω. Quale capacità è necessaria per l'accordo? Quale amplificazione si ottiene?

Soluzione. La capacità necessaria per l'accordo è:

$$C = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{1970 \cdot 10^6} =$$

$$= 0{,}000508 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 508\ \text{pF}$$

Il Q intrinseco della bobina, e quindi del circuito oscillatorio, è:

$$Q = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{5} = \frac{628}{5} = 127$$

Il Q effettivo del circuito è calcolabile tenendo conto che in parallelo al circuito stesso risulta la resistenza interna della valvola:

$$Q_{eff} = \frac{Q}{1 + Q\,\dfrac{\omega L}{R_a}} = \frac{127}{1 + 127\,\dfrac{628}{5 \cdot 10^5}} = \frac{127}{1{,}15} = 110$$

L'amplificazione realizzabile con il circuito suddetto è:

$$A = S\,\omega\,L\,Q_{eff} = 2{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 628 \cdot 110 = 152$$

Problema 276. Un triodo ($\mu = 15$ ed $R_a = 50$ kΩ) è adoperato come amplificatore a RF, con circuito anodico accordato. Questo è costituito da una bobina, avente $L = 200$ μH ed $R_s = 5$ Ω. Qual è la capacità necessaria per accordare il circuito a 500 kHz? Quale amplificazione si ottiene?

Soluzione. La capacità necessaria per l'accordo è:

$$C = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}85 \cdot 25 \cdot 10^{10} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{1970 \cdot 10^{6}} =$$

$$= 0{,}000508 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = 508\ \text{pF}$$

Il Q intrinseco della bobina, e quindi del circuito oscillatorio, è:

$$Q = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^{5} \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{5} = \frac{628}{5} = 127$$

Il Q effettivo del circuito è calcolabile tenendo conto che in parallelo al circuito stesso risulta la resistenza interna della valvola:

$$Q_{eff} = \frac{Q}{1 + Q\dfrac{\omega L}{R_a}} = \frac{127}{1 + 127\dfrac{628}{5 \cdot 10^{4}}} = \frac{127}{2{,}58} = 49$$

La pendenza del triodo è:

$$S = \frac{\mu}{R_a} = \frac{15}{5 \cdot 10^{4}} = 3 \cdot 10^{-4} = 0{,}3\ \text{mA/V}$$

e l'amplificazione risulta:

$$A = S\,\omega\,L\,Q_{eff} = 3 \cdot 10^{-4} \cdot 628 \cdot 49 = 9{,}2$$

Problema 277. Alla griglia di un triodo amplificatore a *RF* ($\mu = 30$, $R_a = 50$ kΩ) è applicata una tensione efficace di 1 V alla frequenza di 460 kHz. Il carico anodico è costituito da un circuito oscillatorio avente una capacità di 250 pF ed una bobina con resistenza serie di 10 ohm. Calcolare il valore dell'induttanza del circuito oscillatorio; il valore della componente alternata della corrente anodica; la tensione alternata presente sul carico anodico; il valore dell'amplificazione.

Soluzione. L'induttanza della bobina del circuito oscillatorio ha il valore:

$$L = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2 C} = \frac{1}{39{,}47 \cdot 460^2 \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{39{,}47 \cdot 2{,}11 \cdot 25} = 480\ \mu\text{H}$$

Il fattore di merito della bobina è:

$$Q = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{6{,}28 \cdot 460 \cdot 10^3 \cdot 480 \cdot 10^{-6}}{10} = \frac{1386}{10} = 183{,}6$$

Il carico costituito dal circuito oscillatorio a risonanza è:

$$Z = \omega\, L\, Q = 6{,}28 \cdot 460 \cdot 10^3 \cdot 480 \cdot 10^{-6} \cdot 138{,}6 = 202\ \text{k}\Omega$$

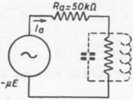


Fig. 121.

Considerando il triodo un generatore a tensione costante $-\mu$E, con resistenza interna in serie al carico anodico, fig. 121, si ha:

$$I_a = \frac{\mu\, E}{(50 + 202)\, 10^3} = \frac{30 \cdot 10^{-3}}{252} = 0{,}119\ \text{mA}$$

La tensione alternata presente sul carico anodico è:

$$V = I_a\, Z = 0{,}119 \cdot 10^{-3} \cdot 202 \cdot 10^3 = 24\ \text{V}$$

Poichè alla griglia del triodo è applicata una tensione di 1 V e si ottengono 24 V sul carico anodico l'amplificazione è di 24.

Problema 278. Alla griglia di un triodo, con $R_a = 20\,000\ \Omega$ e $\mu = 10$, è applicata una tensione di 1 V alla frequenza di 1 MHz. Il carico anodico è costituito da un circuito oscillatorio, accordato alla frequenza suddetta, la cui bobina ha una resistenza di 10 Ω: esso presenta una resistenza dinamica di valore uguale ad R_a. Calcolare i valori dei componenti del circuito oscillatorio e quello della tensione amplificata.

Soluzione. Dalla formula relativa alla resistenza dinamica:

$$Z = \frac{L}{C\,R} \quad \text{si ha} \quad \frac{L}{C} = Z\,R = 2 \cdot 10^4 \cdot 10 = 2 \cdot 10^5$$

Dalla formula relativa alla frequenza:

$$f = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{L\,C}} \quad \text{si ha} \quad L\,C = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 10^{12}} = 2{,}53 \cdot 10^{-14}$$

Dal rapporto:

$$\frac{L\,C}{\dfrac{L}{C}} = C^2 = \frac{2{,}53 \cdot 10^{-14}}{2 \cdot 10^5} = 1{,}26 \cdot 10^{-19}$$

$$C = \sqrt{12{,}6 \cdot 10^{-18}} = 10^{-9}\sqrt{12{,}6} = 3{,}550 \cdot 10^{-9} = 3550 \cdot 10^{-12}\ \text{F} = 3550\ \text{pF}$$

si ha quindi:

$$L = 2 \cdot 10^5\,C = 2 \cdot 10^5 \cdot 3{,}55 \cdot 10^{-9} = 7{,}1 \cdot 10^{-4}\,H = 0{,}71\ \text{mH}$$

Con il valore già determinato della resistenza dinamica si ottiene il valore dell'amplificazione:

$$A = \mu\,\frac{Z}{R_a + Z} = \mu\,\frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^5} = \mu\,\frac{2 \cdot 10^5}{2{,}2 \cdot 10^5} = \mu \cdot 0{,}91 = 9{,}1$$

Problema 279. Un pentodo amplificatore ha come carico anodico un circuito accordato alla frequenza di 467 kHz. Il coefficiente di risonanza della bobina è $Q = 80$ e la sua resistenza in serie $R_s = 12\ \Omega$. Le caratteristiche del pentodo sono: $R_a = 800\ \text{k}\Omega$; $S = 1{,}6\ \text{mA/V}$. Calcolare il valore dell'induttanza della bobina; il valore della capacità collegata in parallelo ad essa; l'amplificazione di tensione fornita dallo stadio.

Soluzione. Dalla formula:

$$Q = \frac{\omega\,L}{R_s}$$

si ottiene:

$$L = \frac{Q\,R_s}{\omega} = \frac{80 \cdot 12}{6{,}28 \cdot 4{,}67 \cdot 10^5} = \frac{960}{29{,}3 \cdot 10^5} = 32{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{H} = 327\ \mu\text{H}$$

La capacità necessaria per la risonanza è:

$$C = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 21{,}8 \cdot 10^{10} \cdot 327 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{28 \cdot 10^8} =$$

$$= 0{,}0356 \cdot 10^{-8}\ \text{F} = 356\ \text{pF}$$

Il Q effettivo del circuito è:

$$Q_{eff} = \frac{Q}{1 + Q \dfrac{\omega L}{R_a}} = \frac{80}{1 + 80 \dfrac{6{,}28 \cdot 4{,}67 \cdot 10^5 \cdot 327 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^5}} =$$

$$= \frac{80}{1 + 80 \dfrac{955}{8 \cdot 10^5}} = \frac{80}{1{,}09} = 73$$

e l'amplificazione realizzabile:

$$A = S \, \omega \, L \, Q_{eff} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 955 \cdot 73 = 111$$

Problema 280. Il circuito anodico accordato di un pentodo è costituito da due bobine, collegate in serie fra loro, ciascuna con $L = 50$ μH ed $R_s = 5\ \Omega$, accoppiate fra loro, con $M = 0{,}5$ μH. Queste due bobine possono essere collegate in modo che i loro flussi risultino concordanti o in opposizione. Calcolare la capacità necessaria nei due casi per accordare il circuito a 1000 kHz. Se il pentodo ha $R_a = 1{,}2$ MΩ ed $S = 2$ mA/V quale amplificazione di tensione si realizza nei due casi?

Soluzione. Le induttanze realizzate nei due casi sono:

$$L_a = L_1 + L_2 + 2\,M = 50 + 50 + 1 = 101 \ \mu\text{H}$$
$$L_b = L_1 + L_2 - 2\,M = 50 + 50 - 1 = 99 \ \mu\text{H}$$

Le capacità necessarie per l'accordo a 1000 kHz sono:
per L_a:

$$C = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2 L_a} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 10^{12} \cdot 101 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{4 \cdot 10^9} =$$
$$= 0{,}25 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 0{,}00025 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 250 \text{ pF}$$

per L_b:

$$C = \frac{1}{4\,\pi^2 f^2 L_b} = \frac{1}{4 \cdot 9{,}86 \cdot 10^{12} \cdot 99 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3{,}9 \cdot 10^9} =$$
$$= 0{,}256 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 256 \text{ pF}$$

per L_a: $$Q = \frac{\omega L_a}{R_s} = \frac{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 101 \cdot 10^{-6}}{10} = \frac{635}{10} = 63{,}5$$

per L_b: $$Q = \frac{\omega L_b}{R_s} = \frac{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 99 \cdot 10^{-6}}{10} = \frac{622}{10} = 62{,}2$$

Inserendo nel circuito anodico le due bobine (e ritenendo che il Q intrinseco del circuito resti inalterato data l'elevata resistenza interna del pentodo) si ottengono le seguenti amplificazioni:

con L_a: $$A = S\,\omega\,L_a\,Q = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 635 \cdot 63{,}5 = 80$$

con L_b: $$A = S\,\omega\,L_b\,Q = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 622 \cdot 62{,}2 = 77{,}4$$

CIRCUITI ACCOPPIATI

Problema 281. Ad una bobina, con induttanza $L_1 = 3$ mH e resistenza $R_1 = 50\ \Omega$, è applicata una tensione $V_1 = 10$ V a 10 000 Hz. A questa bobina è accoppiata ($k = 0{,}25$) una bobina con $L_2 = 5$ mH e resistenza $R_2 = 100\ \Omega$. Fra gli estremi della bobina secondaria è collegata una resistenza $R_c = 100\ \Omega$: qual è l'intensità della corrente che circola in questo carico?

Soluzione. La mutua induttanza esistente fra le due bobine è:

$$M = k\sqrt{L_1\,L_2} = 0{,}25\sqrt{3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}25 \cdot 3{,}87 \cdot 10^{-3} = 0{,}97\ 10^{-3}\ \text{H}$$

L'impedenza complessiva del circuito secondario, comprendente, oltre alla resistenza dell'avvolgimento, quella del carico è:

$$Z_2 = \sqrt{(R_2 + R_c)^2 + X_2^2} = \sqrt{(100 + 100)^2 + (6{,}28 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-3})^2} =$$
$$= \sqrt{138\,000} = 371\ \Omega$$

La resistenza riflessa sul primario risulta:

$$R_r = \frac{\omega^2\,M^2}{Z_2^2}\,R_2 = \frac{(6{,}28 \cdot 10^4)^2\,(0{,}97 \cdot 10^{-3})^2}{371^2}\,10^2 = 2{,}65\ \Omega$$

L'impedenza totale del primario è:

$$Z_1 = \sqrt{(R_1 + R_r)^2 + X_1^2} = \sqrt{(50 + 2{,}65)^2 + (6{,}28 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3})^2} =$$
$$= \sqrt{37\,950} = 197\ \Omega$$

Quindi la corrente che vi circola è:

$$I_1 = V_1/Z_1 = 10/197 = 0{,}051\ \text{A}$$

La tensione indotta nel secondario è:

$$V_2 = \omega\,M\,I_1 = 6{,}28 \cdot 10^4 \cdot 0{,}97 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-2} = 0{,}31\ \text{V}$$

La corrente nel carico è:

$$I_2 = V_2/Z_2 = 0{,}31/371 = 0{,}0083 \text{ A} = 8{,}3 \text{ mA}$$

Problema 282. Un pentodo, con caratteristiche $S = 2$ mA/V ed $R_a = 10^6\ \Omega$, è accoppiato a mezzo di un trasformatore a RF con la valvola successiva. Il suo secondario accordato a 1000 kHz è costituito da una bobina con $L = 150\ \mu$H e $Q = 90$. La mutua induttanza fra primario e secondario è di un sesto del valore critico M_c. Calcolare l'amplificazione fornita dallo stadio.

Soluzione. La pulsazione è:

$$\omega = 6{,}28 \cdot 10^6 \text{ rad/sec}$$

La resistenza serie della bobina:

$$R_s = \frac{\omega L}{Q} = \frac{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 150 \cdot 10^{-6}}{90} = \frac{940}{90} = 10{,}4\ \Omega$$

La mutua induttanza corrispondente ad un accoppiamento critico dovrebbe avere il valore:

$$M_c = \frac{\sqrt{R_a R_s}}{\omega} = \frac{\sqrt{10^6 \cdot 10{,}4}}{6{,}28 \cdot 10^6} = \frac{3{,}22 \cdot 10^3}{6{,}28 \cdot 10^6} = 0{,}513 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

Quindi la mutua induttanza esistente fra gli avvolgimenti è:

$$M = \frac{M_c}{6} = \frac{0{,}513 \cdot 10^{-3}}{6} = 0{,}086 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 86\ \mu\text{H}$$

Il Q effettivo del circuito secondario è:

$$Q_{eff} = \frac{Q}{1 + \left(\dfrac{M}{M_c}\right)^2} = \frac{90}{1 + \left(\dfrac{0{,}086 \cdot 10^{-3}}{0{,}513 \cdot 10^{-3}}\right)^2} = \frac{90}{1{,}028} = 87$$

e l'amplificazione risulta:

$$A = S\,\omega\, M\, Q_{eff} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 86 \cdot 10^{-6} \cdot 87 = 94$$

Problema 283. Di un trasformatore a RF, con secondario accordato, le due bobine hanno $L_1 = L_2 = 300\ \mu$H, $Q_1 = Q_2 = 80$; la mutua induttanza è $M = 40\ \mu$H e la capacità di accordo del secondario $C = 200$ pF. Calcolare la frequenza di risonanza del secondario e, nell'ipotesi che la tensione applicata al circuito primario $V = 1{,}5$ V abbia la stessa frequenza f_0, determinare:

l'impedenza equivalente Z_1 del primario, le correnti I_1 ed I_2 nei due circuiti, la tensione V_c ai morsetti del condensatore.

Soluzione. La frequenza di risonanza risulta:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^{-9}\sqrt{300 \cdot 200}} = 656 \text{ kHz}$$

La pulsazione:

$$\omega = 6{,}28 \cdot 656 \cdot 10^3 = 4119{,}7 \cdot 10^3 \text{ rad/sec}$$

La reattanza induttiva:

$$\omega L = 4119{,}7 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-6} = 1236 \ \Omega$$

e la resistenza serie delle bobine:

$$R_1 = R_2 = \frac{\omega L}{Q} = \frac{1236}{80} = 15{,}4 \ \Omega$$

La resistenza riflessa dal secondario sul primario:

$$R_r = \frac{\omega^2 M^2}{R_2} = \frac{(4119{,}7 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-6})^2}{15{,}4} = \frac{164^2}{15{,}4} = \frac{27\,125}{15{,}4} = 1761 \ \Omega$$

$$R_p = R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2} = 15{,}4 + 1761 = 1776 \ \Omega$$

$$Z_1 = \sqrt{\left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2}\right)^2 + (\omega L_1)^2} = \sqrt{1776^2 + 1236^2} = 2164$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{1{,}5}{2164} = 0{,}69 \text{ mA}$$

La tensione indotta nel secondario è:

$$E_2 = \omega M I_1 = 4119 \cdot 103 \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}69 \cdot 10^{-3} = 0{,}114 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{0{,}114}{15{,}4} = 0{,}0074 \text{ A}$$

$$V_c = Q E_2 = 80 \cdot 0{,}114 = 9{,}1 \text{ V}$$

Problema 284. Due circuiti oscillatori, costituiti con due bobine con $L = 275$ μH ed $R_s = 10 \ \Omega$, sono accordati a 500 kHz. Quale valore di accoppiamento fra i due circuiti è necessario per ottenere il massimo trasferimento di energia da uno all'altro?

Soluzione. Il fattore di merito dei due circuiti è il medesimo:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{\omega L}{R} = \frac{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 275 \cdot 10^{-6}}{10} = 86{,}5$$

L'accoppiamento con cui si ottiene il massimo trasferimento di energia è quello critico:

$$k = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \frac{1}{86{,}5} = 0{,}0116 = 1{,}16\%$$

Problema 285. Un pentodo 6BA6 è adoperato come amplificatore a FI, con un filtro di banda di accoppiamento intervalvolare, accordato a 470 kHz. Le caratteristiche del pentodo sono: $S = 4{,}4$ mA/V ed $R_a = 1$ MΩ. Caratteristiche dei due circuiti, identici, del trasformatore a FI sono: $L = 550$ µH, $Q = 110$, accoppiamento critico. Calcolare l'amplificazione alla risonanza.

Soluzione. Data l'elevata resistenza interna del pentodo si può ritenere ch'essa non alteri il Q intrinseco dei circuiti. Poichè i due circuiti sono uguali e l'accoppiamento è quello critico, l'amplificazione ottenibile è:

$$A = 0{,}5\, S\, \omega\, L\, Q = 0{,}5 \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}28 \cdot 4{,}7 \cdot 10^5 \cdot 550 \cdot 10^{-6} \cdot 110 = 392$$

Problema 286. Una convertitrice ha una pendenza $S = 0{,}8$ mA/V. L'accoppiamento con l'amplificatrice successiva a FI è ottenuto a mezzo di un

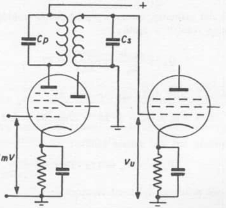


Fig. 122.

trasformatore con le seguenti caratteristiche: $f_0 = 467$ kHz; $C_p = C_s = 150$ pF; $Q_1 = Q_2 = 120$ e $k = k_c$. Applicando una tensione $V_e = 1$ mV, alla frequenza di risonanza, alla griglia della convertitrice, quale valore della tensione risulta sulla griglia dell'amplificatrice a FI?

Soluzione. La pulsazione è:

$$\omega_o = 2\,\pi\,f_o = 6{,}28 \cdot 467 \cdot 10^3 = 2{,}93 \cdot 10^6 \text{ rad/sec}$$

$$L_p = L_s = \frac{1}{\omega_o^2\,C} = \frac{1}{8{,}58 \cdot 10^{12} \cdot 150 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{1287} = 0{,}000775 \text{ H} = 775\ \mu\text{H}$$

$$R_s = \frac{\omega_o\,L}{Q} = \frac{2{,}93 \cdot 10^6 \cdot 775 \cdot 10^{-6}}{120} = \frac{2260}{120} = 18{,}8\ \Omega$$

$$k_c = \frac{1}{Q} = \frac{1}{120} = 0{,}008$$

$$M = k_c\,L = 0{,}008 \cdot 775 \cdot 10^{-6} = 6{,}2 \cdot 10^{-6} \text{ H}$$

La resistenza totale del primario risulta:

$$R_p = R_s + \frac{\omega_o^2\,M^2}{R_s} = 18{,}8 + \frac{8{,}58 \cdot 10^{12} \cdot 38{,}5 \cdot 10^{-12}}{18{,}8} =$$

$$= 18{,}8 + \frac{330}{18{,}8} = 18{,}8 + 17{,}6 = 36{,}4\ \Omega$$

Il Q effettivo del primario, essendo praticamente raddoppiata la sua resistenza serie, risulta ridotto a metà:

$$Q_e = \frac{\omega_o\,L}{R_p} = \frac{2260}{36{,}4} = 62$$

L'amplificazione fornita dalla convertitrice è:

$$A = S\,\omega_o\,L\,Q_e = 8 \cdot 10^{-4} \cdot 2260 \cdot 62 = 112$$

e la tensione presente sul suo anodo risulta:

$$V_u = A\,V_e = 112 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

La corrente nel primario del trasformatore è:

$$I_p = \frac{V_u}{\sqrt{R_p^2 + X_p^2}} = \frac{112 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{1320 + 5{,}1 \cdot 10^6}} = \frac{112 \cdot 10^{-3}}{2260} =$$

$$= 0{,}049 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 49\ \mu\text{A}$$

La tensione indotta nel secondario è:

$$E_2 = \omega_o M I_p = 2{,}93 \cdot 10^6 \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 49 \cdot 10^{-6} = 890 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

Per effetto della risonanza la tensione applicata alla griglia dell'amplificatrice a FI risulta:

$$V_u = E_2 Q_s = 890 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 1{,}07 \cdot 10^{-2} = 0{,}01 \text{ V} = 100 \text{ mV}$$

per cui:

$$A = \frac{V_u}{V_e} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 100$$

Applicando la nota formula approssimata, che consente di calcolare l'amplificazione ottenuta con filtri di banda con accoppiamento critico si ha:

$$A = 0{,}5\, S\, \omega\, L\, Q = 0{,}5 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}93 \cdot 10^6 \cdot 775 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 114$$

Problema 287. Quale valore deve avere il Q dei circuiti di un trasformatore a FI se, con accoppiamento critico, si deve ottenere una banda passante di 8 kHz alla frequenza di sintonia $f_o = 467$ kHz?

Soluzione:

$$Q = \frac{1}{k_c} = \frac{f_o}{\Delta f} = \frac{467 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} = 59$$

SUPERETERODINA

Problema 288. In una supereterodina per OM ($500 \div 1600$ kHz) la frequenza intermedia è di 470 kHz. Se la bobina del circuito oscillatorio di antenna ha un'induttanza $L_a = 210$ µH, quale valore deve avere l'induttanza L_o del circuito dell'oscillatore locale? Si ritiene che le somme delle capacità distribuite dei due circuiti oscillatori siano uguali.

Soluzione. La capacità minima del circuito oscillatorio di antenna, per risuonare a 1600 kHz, è:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_a} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6)^2\, 210 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{10^2 \cdot 10^{12} \cdot 210 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= \frac{1}{210 \cdot 10^8} = 0{,}00475 \cdot 10^{-8} \text{ F} = 47 \text{ pF}$$

Con una capacità dello stesso valore il circuito dell'oscillatore locale deve risuonare a $1600 + 470 = 2070$ kHz; è quindi necessaria per questo circuito un'induttanza:

$$L_o = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 2{,}07 \cdot 10^6)^2\, 47 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{169 \cdot 10^{12} \cdot 47 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{1}{7950} = 0{,}000126 \text{ H} = 126\ \mu\text{H}$$

Problema 289. Un ricevitore supereterodina è costruito per la gamma di OM, da 1650 a 500 kHz. Se la capacità residua del condensatore di antenna e del circuito dell'oscillatore locale sono entrambe di 40 pF, quali valori dovranno avere le induttanze dei rispettivi circuiti e quali le capacità massime da ottenere? La FI è accordata a 465 kHz: quale valore dovrà avere l'induttanza delle bobine dei filtri di banda, se le capacità di accordo sono di 175 pF?

Soluzione. L'induttanza del circuito oscillatorio di antenna, per risuonare a 1650 kHz, con 40 pF, deve essere:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 1{,}65 \cdot 10^6)^2\, 40 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{107 \cdot 10^{12} \cdot 40 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{1}{4280} = 0{,}000228 \text{ H} = 228\ \mu\text{H}$$

L'induttanza del circuito dell'oscillatore locale, per risuonare a $1650 + 465 = 2115$ kHz, con 40 pF, deve essere:

$$L = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 2{,}11 \cdot 10^6)^2\, 40 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{174 \cdot 10^{12} \cdot 40 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{6960} =$$

$$= 0{,}000143 \text{ H} = 143\ \mu\text{H}$$

Per ottenere l'accordo a 500 kHz del circuito di antenna la capacità deve risultare:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5)^2\, 228 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{985 \cdot 10^{10} \cdot 228 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= \frac{1}{226 \cdot 10^7} = 0{,}0044 \cdot 10^{-7} \text{ F} = 440 \text{ pF}$$

Per ottenere l'accordo a $500 + 465 = 965$ kHz del circuito dell'oscillatore locale la capacità deve risultare:

$$C = \frac{1}{(6,28 \cdot 9,65 \cdot 10^5)^2 \, 143 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3550 \cdot 10^{10} \cdot 143 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{508 \cdot 10^7} =$$

$$= 0,00197 \cdot 10^{-7} \text{ F} = 197 \text{ pF}$$

L'induttanza delle bobine dei filtri di banda deve essere:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(6,28 \cdot 4,65 \cdot 10^5)^2 \, 175 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{860 \cdot 10^{10} \cdot 175 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{1}{1500} = 0,000665 \text{ H} = 665 \ \mu\text{H}$$

Problema 290. In una supereterodina l'oscillatore locale deve lavorare nella gamma di frequenze 967÷1967 kHz. Il circuito ha una capacità distribuita di 25 pF. Il condensatore variabile ha una capacità minima di 15 pF ed una massima di 430 pF. Quale valore deve avere l'induttanza della bobina e quale la capacità del condensatore in serie al variabile?

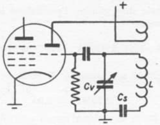


Fig. 123.

Soluzione. La capacità minima che risulta in parallelo alla bobina, alla frequenza di 1967 kHz, è la somma della capacità distribuita del circuito e di quella minima del variabile, quindi $C_{min} = 25 + 15 = 40$ pF. L'induttanza della bobina deve risultare:

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(6,28 \cdot 1,967 \cdot 10^6)^2 \, 40 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{153 \cdot 10^{12} \cdot 40 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{1}{6120} = 0,0001634 \text{ H} = 163 \ \mu\text{H}$$

Per ottenere, con il circuito oscillatorio comprendente questa bobina, l'accordo ad una frequenza minima di 967 kHz, occorre una capacità:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{(6{,}28 \cdot 9{,}67 \cdot 10^5)^2\, 163 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{3700 \cdot 10^{10} \cdot 163 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= \frac{1}{6{,}3 \cdot 10^9} = 0{,}158 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F} = 158\ \mathrm{pF}$$

La capacità massima raggiunta dalla sezione del variabile collegata all'oscillatore è di $430 + 25 = 455$ pF. Affinchè risulti di 158 pF le verrà collegato in serie un condensatore:

$$C_s = \frac{158\, C_v}{C_v - 158} = \frac{158 \cdot 455}{455 - 158} = \frac{20\,000}{297} = 242\ \mathrm{pF}$$

Problema 291. Calcolare i valori dei condensatori da collegare in serie alla sezione di un condensatore variabile di un oscillatore locale, che consente una variazione di capacità da $40 \div 360$ pF, per la gamma $500 \div 1500$ kHz e per quella $7{,}5 \div 22{,}5$ MHz. La FI è di 470 kHz.

Soluzione. Per queste due gamme l'oscillatore locale deve fornire le seguenti gamme di frequenze:

$$970 \div 1970\ \mathrm{kHz} \quad \mathrm{e} \quad 7970 \div 22\,970\ \mathrm{kHz}$$

Alla prima corrisponde un rapporto di gamma:

$$1970/970 = 2{,}03$$

per cui il variabile deve assumere una capacità massima:

$$40 \cdot 2{,}03^2 = 40 \cdot 4{,}12 = 165\ \mathrm{pF}$$

Alla seconda corrisponde un rapporto di gamma:

$$22\,970/7970 = 2{,}88$$

per cui il variabile deve assumere una capacità massima:

$$40 \cdot 2{,}88^2 = 40 \cdot 8{,}29 = 331{,}6\ \mathrm{pF}$$

Il condensatore da collegare in serie alla sezione del variabile dell'oscillatore per la gamma di onde medie deve essere:

$$C = \frac{360 \cdot 165}{360 - 165} = \frac{59\,400}{195} = 304\ \mathrm{pF}$$

Il condensatore da aggiungere in serie per la gamma di onde corte deve essere:

$$C = \frac{360 \cdot 331}{360 - 331} = \frac{119\,160}{29} = 4100 \text{ pF}$$

ALIMENTAZIONE

Problema 292. Sul primo condensatore del filtro di un alimentatore a due semionde vi è una tensione alternata $V_1 = 10$ V, alla frequenza di 100 Hz. Questa tensione deve ridursi a $V_2 = 0{,}01$ V sul secondo condensatore del filtro, da cui si preleva la corrente di alimentazione di un amplificatore. Quale valore minimo deve avere la seconda capacità del filtro se si fa uso di una bobina con nucleo di ferro di 20 H come impedenza di livellamento?

Soluzione. Il rapporto fra le tensioni alternate presenti sui due condensatori del filtro è:

$$V_1/V_2 = 10/0{,}01 = 1000$$

$$10^3 = \omega^2 L\, C \quad ; \quad \omega = 2\,\pi f = 6{,}28 \cdot 100 = 628 \quad ; \quad 10^3 = 4 \cdot 10^5 \cdot L \cdot C$$

$$L\, C = \frac{10^3}{4 \cdot 10^5} = \frac{1}{400} = 0{,}0025 \text{ (H e F)}$$

Poichè l'impedenza di filtro ha un'induttanza di 20 H:

$$C = \frac{0{,}0025}{20} = 0{,}000120 \text{ F} = 120\ \mu\text{F}$$

Problema 293. Una raddrizzatrice, con due anodi, fornisce una corrente continua di 60 mA. Quali sono i valori della componente alternata sul primo e sul secondo condensatore del filtro, se l'impedenza di filtro è di 20 H ed i due condensatori hanno una capacità di 16 μF ciascuno?

Soluzione. La componente alternata sul primo condensatore del filtro è:

$$V_r = \frac{150\, I}{2\, f\, C} = \frac{150 \cdot 60}{2 \cdot 50 \cdot 16} = \frac{9000}{1600} = 5{,}6 \text{ V}$$

L'impedenza ed il secondo condensatore del filtro costituiscono un partitore della tensione alternata, per cui sul secondo condensatore risulta una componente alternata:

$$V = 5{,}6 \frac{X_C}{X_L - X_C} = 5{,}6 \frac{\dfrac{1}{628 \cdot 16 \cdot 10^{-6}}}{628 \cdot 20 - \dfrac{1}{628 \cdot 16 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= 5{,}6 \frac{\dfrac{10^6}{10^4}}{12\,600 - \dfrac{10^6}{10^4}} = 5{,}6 \frac{100}{12\,500} = \frac{5{,}6}{125} = 0{,}045 \text{ V}$$

Problema 294. Un raddrizzatore fornisce una tensione a vuoto $V_a = 350$ V. Esso deve alimentare un amplificatore che richiede $V_e = 250$ V ed $I_e = 100$ mA. La regolazione di tensione del raddrizzatore, da carico nullo a pieno carico, è del 15%. Calcolare il valore della resistenza da inserire fra i due condensatori della cellula di filtro per ottenere la tensione voluta a pieno carico, la potenza dissipata in essa, la regolazione della tensione totale.

Soluzione. La caduta di tensione nel raddrizzatore è:

$$V_d = 350 \cdot 0{,}15 = 52{,}5 \text{ V}$$

La tensione del raddrizzatore si riduce, sotto pieno carico, da $V_a = 350$ V a:

$$V_u = 350 - 52{,}5 = 297{,}5 \text{ V}$$

La resistenza in serie deve avere il valore:

$$R_s = \frac{297 - 250}{0{,}1} = \frac{47}{0{,}1} = 470\ \Omega$$

La potenza in essa dissipata è:

$$P = R\,I^2 = 470 \cdot 0{,}1^2 = 4{,}7 \text{ W}$$

La tensione sulla resistenza di carico varia da 250 V, con carico inserito, a 350 V senza carico, cioè la caduta di tensione massima che si verifica nel circuito diodo-resistenza serie è di 100 V, quindi la regolazione della tensione fra i morsetti dell'alimentatore è:

$$\frac{V_r}{V_a} = \frac{100}{350}\, 100 = 28{,}5\%$$

Problema 295. Un alimentatore deve fornire una tensione di 300 V, con una componente alternata massima di 0,2 V, ed una corrente continua $I_c = 100$ mA. La frequenza della rete è di 50 Hz, la raddrizzatrice è con due anodi, la bobina di eccitazione dell'altoparlante, adoperata come impedenza nella cellula di filtro, ha un'induttanza di 20 H, il primo condensatore del filtro è di 16 μF. Quale capacità minima va adoperata per il secondo condensatore del filtro?

Soluzione. Sul primo condensatore del filtro risulta una componente alternata:

$$V_1 = \frac{150\, I}{2\, f\, C_1} = \frac{150 \cdot 100}{100 \cdot 16} = \frac{150}{16} = 9{,}4 \text{ V}$$

Sul secondo condensatore deve risultare una componente alternata di 0,2 V, cioè:

$$\frac{V_1}{\omega^2 L\, C_2 - 1} = 0{,}2$$

da cui:

$$V_1 = 0{,}2\, \omega^2 L\, C_2 - 0{,}2$$

trascurando il $-\,0{,}2$ del secondo membro:

$$C_2 = \frac{V_1}{0{,}2\, \omega^2 L} = \frac{9{,}4}{0{,}2\,(6{,}28 \cdot 100)^2\, 20} = \frac{9{,}4}{0{,}2 \cdot 3{,}92 \cdot 10^5 \cdot 20} =$$

$$= \frac{9{,}4 \cdot 10^{-5}}{15{,}6} = 0{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ F} = 6 \text{ μF}$$

Questa è la capacità minima di cui far uso nell'alimentatore.

Problema 296. Ad ogni anodo di un doppio diodo a gas è applicata una tensione di 300 V efficaci. Il filtro è costituito da una impedenza con nucleo di ferro di 20 H, con resistenza $R = 75\ \Omega$ e da un condensatore di 10 μF. Qual è il valore della tensione continua presente su C se la corrente richiesta dal carico è di 100 mA?

Soluzione. La formula della tensione continua presente sul condensatore all'uscita del filtro, tenendo conto della caduta di tensione costante nella valvola ($I\, R_V = 15$ V) e di quella nell'impedenza è:

$$V = 0{,}9\, V_{eff} - I\,(R_V + R_L)$$

$$V = 0{,}9 \cdot 300 - 15 - 0{,}1 \cdot 75 = 270 - 22{,}5 = 247{,}5 \text{ V}$$

TRANSISTORI

Problema 296. Dalle caratteristiche $-I_C - V_{CE}$ di un transistore OC 71, collegato con emettitore in comune, ricavare graficamente le amplificazioni A_i, di corrente, e A_v, di tensione ed il guadagno in potenza g per una corrente di entrata di 40 μA p. a p. La tensione di alimentazione è di 10 V, la resistenza di carico del collettore $R_C = 2000\ \Omega$, la resistenza di entrata del transistore $R_i = 1000\ \Omega$, per una corrente di base di 50 μA e $-4{,}5$ V sul collettore.

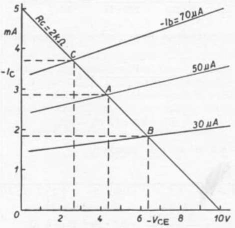


Fig. 124.

Soluzione. Dalle caratteristiche $-I_C - V_{CE}$ di fig. 147, per un'alimentazione di 10 V ed una resistenza di carico di 2000 Ω si ha una retta di carico che unisce la suddetta tensione ed una corrente I_C di 5 mA. Sul collettore risulta una tensione di $-4{,}5$ V in corrispondenza della corrente di base di 50 μA, punto A, fig. 124, con una corrente di collettore di 2,8 mA.

Le variazioni della corrente di base sono di 40 μA p. a p., cioè le variazioni di corrente avvengono da 30 a 70 μA, punti B e C, a cui corrispondono 1,8 e 3,7 mA di corrente del collettore. L'amplificazione di corrente è:

$$A_i = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{I_{Cmax} - I_{Cmin}}{I_{Bmax} - I_{Bmin}} = \frac{(3{,}7 - 1{,}8)\,10^{-3}}{(70 - 30)\,10^{-6}} = \frac{1{,}9}{0{,}04} = 47{,}5$$

Le variazioni di tensione sul collettore, in corrispondenza dei punti C e B

sulla retta di carico, sono di 2,7 e 6,3 V. Le variazioni di tensione sulla base, che danno origine alle variazioni di 40 μA, sono:

$$\Delta V_{BE} = \Delta I_B R_i = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^{-2} = 0{,}04 \text{ V}$$

L'amplificazione di tensione è:

$$A_v = \frac{\Delta V_{CE}}{\Delta V_{BE}} = \frac{6{,}3 - 2{,}7}{0{,}04} = \frac{3{,}6}{0{,}04} = 90$$

Il guadagno in potenza è dato dal prodotto dei due guadagni ora calcolati:

$$g = A_i A_v = 47{,}5 \cdot 90 = 3925$$

Problema 298. A mezzo delle caratteristiche $- I_C - V_{CE}$ di un transistore OC 71, collegato con emettitore in comune, fig. 147, costruire graficamente le caratteristiche di trasferimento dinamiche per un carico di collettore $R_C = 1500\ \Omega$ o $R_C = 2000\ \Omega$, con una tensione di alimentazione di 10 V e determinare il valore della corrente della base per un funzionamento nel tratto più lineare della caratteristica dinamica per una variazione della corrente di base di 40 μA p. a p.

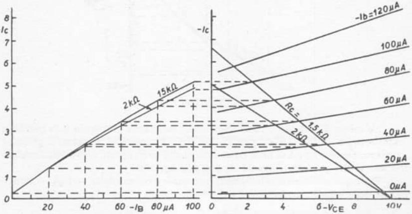


Fig. 125.

Soluzione. Dalla fig. 125 risultano le due caratteristiche dinamiche corrispondenti alle due rette di carico. Esse hanno un primo tratto in comune, quella corrispondente al carico $R_C = 1500\ \Omega$ è più lineare dell'altra, fino ad una corrente $I_B = 80\ \mu A$. Un segnale amplificato con un tale carico sul collettore è distorto di meno. La corrente di base a riposo può essere di 50 μA e può subire delle variazioni di $\pm 20\ \mu A$ senza fuoruscire dalla suddetta zona lineare.

Problema 299. A mezzo delle caratteristiche di fig. 147 determinare, per correnti di base $I_B = 50\ \mu A$ e $I_B = 100\ \mu A$, i valori della resistenza di entrata di un transistore OC 71, per tensioni sul collettore di 0 e $-4{,}5$ V. Determinare il valore della resistenza di uscita per le medesime correnti di base e per $-V_{CE} = -4{,}5$ V. Calcolare i valori delle ammettenze di uscita corrispondenti.

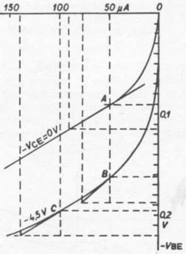


Fig. 126.

Soluzione. Per determinare i valori della resistenza di entrata si fa uso della caratteristica $-I_B - V_{BE}$, per $V_{CE} = 0\ V$. Tracciata la tangente al punto A corrispondente a 50 μA si nota come essa risulti sovrapposta alla stessa caratteristica, anche per una corrente di 100 μA, fig. 126.

Per entrambe le suddette correnti per una variazione della $-V_{BE} = 22$ mV corrisponde una variazione di $I_B = 40\ \mu A$, quindi:

$$R_i = \frac{22 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-6}} = 0{,}55 \cdot 10^3 = 550\ \Omega$$

Per $V_{CE} = 4{,}5$ V con $I_B = 50\ \mu A$, tracciata la tangente al punto B si ha:

$$R_i = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{27 \cdot 10^{-6}} = 10^3 = 1000\ \Omega$$

Per $V_{CE} = 4{,}5$ V con $I_B = 100$ μA alla tangente al punto C corrispondono:

$$R_i = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-6}} = 0{,}65 \cdot 10^3 = 650\ \Omega$$

A mezzo delle caratteristiche $-I_C - V_{CE}$, per $I_B = 50$ μA, fig. 127, risulta, per una variazione di tensione V_{CE} da 2,5 a 7,5 V, una variazione della corrente di collettore da 3,2 a 2,6 mA, quindi:

$$R_u = \frac{\Delta V_{CE}}{\Delta I_E} = \frac{7{,}5 - 2{,}5}{(3{,}2 - 2{,}6) \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{0{,}6 \cdot 10^{-3}} = 8350\ \Omega$$

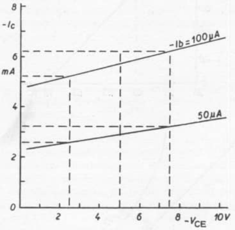


Fig. 127.

Per una $I_B = 100$ μA e le medesime variazioni di tensione del collettore, si hanno variazioni della corrente di 6,2 a 5,2 mA:

$$R_u = \frac{\Delta V_{CE}}{\Delta I_E} = \frac{7{,}5 - 2{,}5}{(6{,}2 - 5{,}2) \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{10^{-3}} = 5000\ \Omega$$

Ai suddetti valori di resistenza di uscita corrispondono valori della conduttanza:

$$I_B = 50\ \mu A \qquad h_{22e} = \frac{600 \cdot 10^{-6}}{5} = 120\ \mu A/V$$

$$I_B = 100\ \mu A \qquad h_{22e} = \frac{1000 \cdot 10^{-6}}{5} = 200\ \mu A/V$$

Problema 300. La potenza massima dissipabile sul collettore di un transistore al germanio tipo OC 71 è di 125 mW, alla temperatura ambiente di 25 °C. La temperatura massima a cui può essere portato il transistore è di 75 °C.

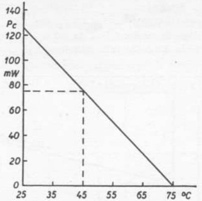


Fig. 128.

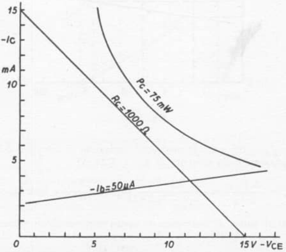


Fig. 129.

Determinare qual è la potenza massima che può dissipare alla temperatura ambiente di 45 °C. Tracciare su una famiglia di caratteristiche $-I_C - V_{CE}$

la curva di massima dissipazione corrispondente e controllare se il transistore può lavorare con un carico $R_C = 1000\ \Omega$, una tensione di alimentazione di 15 V ed una $I_B = 50\ \mu A$.

Soluzione. Per la determinazione della massima potenza che può essere dissipata sul collettore alla temperatura ambiente di 45 °C occorre tracciare la caratteristica corrispondente, fig. 128. Da essa si ricava che la massima potenza che può essere dissipata sul collettore è di 75 mW.

Sulla famiglia di caratteristiche $- I_C - V_{CE}$, fig. 129, si traccia la curva corrispondente a 75 mW, cioè alle coppie di valori: 6 V — 12,5 mA; 8 V — 9,4 mA; 10 V — 7,5 mA; 15 V — 5 mA, ritenendo il valore massimo di $I_C = 10$ mA.

Tracciata quindi la retta di carico per $R_C = 1000\ \Omega$, fig. 129, essa risulta inferiore alla curva di massima dissipazione perciò il transistore può lavorare nelle condizioni date poichè dissipa una potenza notevolmente inferiore alla massima ammissibile.

Problema 301. Tracciare a mezzo delle caratteristiche di fig. 147 quella $- I_C = f(V_{BE})$ e determinare il valore della pendenza del transistore OC 71 per tensioni V_{BE} di 0,1 e 0,2 V.

Soluzione. Ridisegnate le caratteristiche $- I_C - I_B$ e $- I_B - V_{BE}$, fig. 130, si tracciano le parallele orizzontali passanti per i valori di V_{BE} di 0,1 e 0,2 V sulla caratteristica del terzo quadrante, fino all'incontro con la stessa caratteristica. Si tracciano per i punti di incrocio due verticali fino all'incontro della caratteristica del secondo quadrante. Da questi due nuovi punti di incontro si tracciano altre due parallele orizzontali che incontreranno le verticali innalzate dai valori $- V_{BE}$ di 0,1 e 0,2 V sull'asse delle ascisse del primo quadrante. Con questi due punti e quello corrispondente a 0,06 V ($I_B = 0$) si può tracciare la caratteristica della pendenza del transistore.

Tracciando la tangente al punto A, corrispondente a 0,1 V della tensione di base, si ha per una variazione di tensione da 0,1 a 0,15 V una variazione della corrente del collettore da 0,65 a 1,7 mA, quindi una pendenza:

$$S = \frac{(1{,}7 - 0{,}65) \cdot 10^{-3}}{0{,}15 - 0{,}1} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-3}}{0{,}05} = 21\ \text{mA/V}$$

Tracciando la tangente al punto B, corrispondente a 0,2 V della tensione di base, si ha per una variazione di tensione da 0,2 a 0,22 V una variazione della corrente del collettore da 5,7 a 7,6 mA, quindi una pendenza:

$$S = \frac{(7{,}6 - 5{,}7) \cdot 10^{-3}}{0{,}22 - 0{,}2} = \frac{1{,}9 \cdot 10^{-3}}{0{,}02} = 95\ \text{mA/V}$$

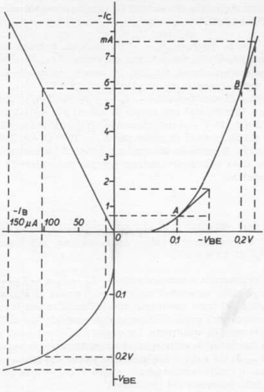


Fig. 130.

TELEVISIONE

Problema 302. Quali sono le frequenze medie geometriche dei vari canali di TV?

Soluzione. Il valore della frequenza media geometrica è dato dalla radice quadrata del prodotto delle due frequenze estreme.

Canale	Frequenze estreme	Frequenza media
A	52,5-59,5	$\sqrt{3125} = 56$
B	61-68	$\sqrt{4150} = 64{,}5$
C	81-88	$\sqrt{7128} = 84{,}2$
D	174-181	$\sqrt{31\,500} = 177{,}5$
E	182,5-189,5	$\sqrt{34\,500} = 186$
F	191-198	$\sqrt{37\,800} = 194$
G	200-207	$\sqrt{41\,500} = 204$
H	209-216	$\sqrt{45\,300} = 213$

Problema 303. Il commutatore di canali di un televisore è sulla posizione A (52,5÷59,5 MHz) e la FIV è di 26,75 MHz. Quali sono le tre frequenze che possono, battendo con la fondamentale o la seconda armonica dell'oscillatore, produrre interferenze sull'immagine?

Soluzione. La portante video del canale A è a 53,75 MHz, quindi l'oscillatore locale del televisore lavora a 53,75 + 26,75 = 80,50 MHz.

Una frequenza maggiore di quella dell'oscillatore locale può interferire se essa risulta di:

$$80{,}5 + 26{,}75 = 107{,}25 \text{ MHz}$$

Altre due frequenze, che risultano a $\pm$ 26,75 MHz rispetto alla seconda armonica dell'oscillatore locale, possono interferire sull'immagine, cioè:

$$2^a \text{ armonica} = 80{,}50 \cdot 2 = 162 \text{ MHz}$$

$$162 + 26{,}75 = 188{,}75 \text{ MHz}$$

$$162 - 26{,}75 = 135{,}25 \text{ MHz}$$

Problema 304. Qual è il valore della tensione prodotta dall'agitazione termica nel circuito d'ingresso di un televisore alla temperatura di 20 °C?

Soluzione. Ammettendo una larghezza di banda $B = 7$ MHz, per ottenere una resa uniforme per tutte le frequenze relative al canale ricevuto si ha:

$$V^2 = 4\,k\,T\,R\,B = 4\,(1{,}83 \cdot 10^{-23})\,(273 + 20)\,300\,(7 \cdot 10^6) = 4{,}5 \cdot 10^{-11}$$

e la tensione di disturbo risulta:

$$V = \sqrt{4{,}5 \cdot 10^{-11}} \doteq 6{,}7 \cdot 10^{-6} = 6{,}7\ \mu\text{V}$$

Problema 305. Qual è il valore della tensione di disturbo per agitazione termica che si ha, alla temperatura di 18 °C, su di un resistore di 10 kΩ se la banda passante dell'amplificatore seguente è $B = 3$ MHz?

Soluzione. La formula pratica per il calcolo del valore della tensione per agitazione termica è data dalla formula semplificata:

$$V_d = 1{,}25 \cdot 10^{-10} \sqrt{R\,B} = 1{,}25 \cdot 10^{-10} \sqrt{10^4 \cdot 3 \cdot 10^6} = 1{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}73 =$$
$$= 2{,}16 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{V} = 21{,}65\ \mu\mathrm{V}$$

Problema 306. Quale valore ha la tensione indotta, in un'antenna ricevente in mezza onda, da un campo elettromagnetico di intensità $\varepsilon = 10\ \mu$V/m alla frequenza di 200 MHz?

Soluzione. Ad una frequenza di 200 MHz corrisponde una lunghezza d'onda $\lambda = 1{,}5$ m.

L'altezza effettiva dell'antenna in mezza onda è:

$$h = \lambda/\pi = 1{,}5/3{,}14 = 0{,}48\ \mathrm{m}$$

La tensione indotta in questa antenna è:

$$E = \varepsilon\, h = 10 \cdot 0{,}48 = 4{,}8\ \mu\mathrm{V}$$

Problema 307. Calcolare la resistenza di radiazione R_r e la potenza irradiata P_r, da un'antenna in mezza onda, a cui sia inviata una corrente di 3 A.

Soluzione. La resistenza di radiazione è:

$$R_r = 80 \left(\frac{\pi\, h}{\lambda}\right)^2$$

poichè in questa formula l'altezza effettiva h dell'antenna è:

$$h = \frac{\lambda}{\pi}$$

risulta:

$$R_r = 80 \left(\frac{\pi \dfrac{\lambda}{\pi}}{\lambda}\right)^2 = 80 \cdot 1^2 = 80\ \Omega$$

La potenza irradiata è:

$$P_r = R_r\, I^2 = 80 \cdot 3^2 = 720\ \mathrm{W}$$

Problema 308. Se il guadagno in energia di un sistema di antenna, rispetto al semplice dipolo ricevente, è di 8 quale ne è il guadagno in decibel?

Soluzione. Il guadagno in potenza risulta:

$$10 \log 8 = 10 \cdot 0{,}9 = 9 \text{ dB}$$

Problema 309. Se fra un'antenna trasmittente, alta 100 m, ed un'antenna ricevente, alta 8 m, non esistono ostacoli, qual è la massima distanza a cui si può piazzare quest'ultima per ottenere la ricezione dell'onda diretta?

Soluzione. La massima distanza geometrica a cui può essere piazzata l'antenna ricevente per ottenere la ricezione dell'onda diretta (cioè senza tener conto della diffrazione dell'onda stessa, che aumenta la portata) è:

$$d = 4{,}1 \cdot 10^3 (\sqrt{h_t} + \sqrt{h_r}) = 4{,}1 \cdot 10^3 (\sqrt{100} + \sqrt{8}) =$$
$$= 4{,}1 \cdot 10^3 (10 + 2{,}83) = 52{,}6 \cdot 10^3 \text{ m}$$

La distanza massima a cui si possono piazzare le due antenne è di 52,6 km

Problema 310. Una linea di trasmissione, lunga 30 m, ha, per ogni elemento di 3 m di lunghezza, un'induttanza di 25 μH ed una capacità di 90 pF. Qual è l'impedenza caratteristica della linea? In quanto tempo un impulso di tensione si propaga lungo essa?

Soluzione. L'impedenza caratteristica è:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-6}}{90 \cdot 10^{-12}}} = 10^3 \sqrt{0{,}278} = 0{,}528 \cdot 10^3 = 528 \ \Omega$$

Il tempo richiesto dall'impulso di tensione per propagarsi per tutta la sua lunghezza è 10 volte quello impiegato per la propagazione lungo un elemento di 3 m:

$$t = 10 \sqrt{L\,C} = 10 \sqrt{25 \cdot 10^{-6} \cdot 90 \cdot 10^{-12}} = 10^{-8} \sqrt{2250} =$$
$$= 47{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ sec} = 0{,}47 \ \mu\text{sec}$$

Problema 311. Quale differenza in lunghezza d'onda si ha per una tensione alla frequenza di 100 MHz se essa si propaga nello spazio o in una linea di trasmissione lunga 35 m, avente una capacità distribuita di 220 pF ed un'induttanza di 220 μH?

Soluzione. La lunghezza d'onda nella propagazione nello spazio è:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} = 3 \text{ m}$$

Il tempo di propagazione della linea è:

$$t = \sqrt{L\,C} = \sqrt{220 \cdot 10^{-6} \cdot 220 \cdot 10^{-12}} = 10^{-9}\sqrt{48\,400} =$$

$$= 220 \cdot 10^{-9} \text{ sec} = 0{,}22 \ \mu\text{sec}$$

la velocità di propagazione è:

$$u_l = \frac{l}{t} = \frac{35}{0{,}22 \cdot 10^{-6}} = 159 \cdot 10^{6} \text{ m}$$

La lunghezza d'onda, corrispondente alla frequenza di 100 MHz, nella linea è:

$$\lambda = \frac{u_l}{f} = \frac{159 \cdot 10^{6}}{100 \cdot 10^{6}} = 1{,}59 \text{ m}$$

Problema 312. Un cavo coassiale presenta, a 200 MHz, un'attenuazione di 2,8 dB per 30 m di lunghezza. Quanto può essere lungo un cavo, dello stesso tipo, perchè si abbia una riduzione del segnale a metà ampiezza?

Soluzione. L'attenuazione del cavo è direttamente proporzionale alla lunghezza, cioè ogni metro di esso presenta un'attenuazione:

$$\frac{2{,}8}{30} = 0{,}093 \text{ dB}$$

Un'attenuazione che riduca l'ampiezza del segnale a metà corrisponde a -3 dB, quindi la lunghezza del cavo deve essere di:

$$\frac{3}{0{,}093} = 32{,}2 \text{ m}$$

Problema 313. Se un cavo coassiale presenta un'attenuazione di 4,7 dB a 50 MHz, per ogni 30 m di lunghezza, quale attenuazione presenterà a 200 MHz?

Soluzione. L'attenuazione in dB risulta proporzionale alla radice quadrata della frequenza, quindi la stessa lunghezza di cavo presenterà a 200 MHz un'attenuazione:

$$\alpha = 4{,}7\sqrt{\frac{200}{50}} = 4{,}7 \cdot 2 = 9{,}4 \text{ dB}$$

Problema 314. Qual è l'induttanza per metro di lunghezza di un cavo coassiale con impedenza caratteristica $Z_0 = 75\ \Omega$, se la sua capacità per metro è di 40 pF?

Soluzione. L'impedenza caratteristica del cavo è data da:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

da cui si ottiene:

$$Z_0^2 = \frac{L}{C}$$

ed infine:

$$L = Z_0^2\, C = 75^2 \cdot 40 \cdot 10^{-12} = 22\,500 \cdot 10^{-12} = 0{,}022 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H} = 0{,}022\ \mu\mathrm{H}$$

Problema 315. Calcolare l'impedenza caratteristica di un pezzo di conduttore bifilare delle seguenti dimensioni: diametro dei conduttori, $d = 0{,}35$ mm; distanza fra i centri dei conduttori, $D = 1{,}5$ mm. L'isolante in cui sono immersi i conduttori è il politene, la cui costante dielettrica è $\varepsilon = 2{,}25$.

Soluzione. L'impedenza caratteristica è:

$$Z_0 = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon}} \log \frac{D}{r} = \frac{276}{1{,}5} \log \frac{1{,}5}{0{,}175} = 184 \log 8{,}6 = 184 \cdot 0{,}724 = 133\ \Omega$$

Problema 316. Di quale diametro e lunghezza, ed a quale distanza, vanno piazzati i due conduttori tubolari di un tronco di linea, adattatore di impedenza fra un dipolo di 140 Ω ed una linea bifilare di 300 Ω, per la frequenza di 203 MHz?

Soluzione. L'impedenza del tronco deve risultare la media geometrica delle impedenze da adattare:

$$Z_0 = \sqrt{140 \cdot 300} = 205\ \Omega$$

Adoperando dei pezzi di tubo di mm 10 di diametro esterno, risulta:

$$Z_0 = 205 = 276 \log \frac{D}{r} = 276 \log \frac{D}{5}$$

da cui:

$$\log \frac{D}{5} = \frac{205}{276} = 0{,}74 = \log 8{,}7$$

$$D = 5 \cdot 8{,}7 = 43{,}5\ \mathrm{mm}$$

La lunghezza d'onda corrispondente a 203 MHz è:

$$\lambda = \frac{300}{203} = 1{,}47 \qquad \frac{\lambda}{4} = \frac{1{,}47}{4} = 0{,}37 \text{ m}$$

Problema 317. Le capacità parassite del circuito di accoppiamento fra due valvole risultano di 20 pF. Quale dovrà risultare il valore della resistenza di carico anodico della prima valvola se si vuole ottenere una frequenza massima, uniformemente amplificata, $f_{max} = 5$ MHz?

Soluzione. Per ottenere un'amplificazione uniforme fino alla frequenza di 5 MHz occorre che a questa frequenza la reattanza, presentata dalla capacità distribuita totale del circuito, abbia lo stesso valore della resistenza di carico anodico:

$$R_c = X_c = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{628} = 1600\ \Omega$$

Problema 318. Un pentodo 6AC7 ha una pendenza $S = 9$ mA/V, una capacità d'ingresso di 10 pF ed una capacità di uscita di 5 pF. Qual è il valore del prodotto della larghezza di banda per l'amplificazione? Se la larghezza di banda è di 5 MHz quale valore dell'amplificazione si può ottenere dallo stadio? Se necessita un'amplificazione $A = 25$ quale dovrebbe essere il valore della capacità distribuita totale, ritenendo la pendenza e la larghezza di banda invariate?

Soluzione. Dalla formula della larghezza di banda per l'amplificazione:

$$A\,B = \frac{S}{2\pi C_t} = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{6{,}28 \cdot 15 \cdot 10^{-12}} = \frac{9 \cdot 10^9}{94} = 96 \cdot 10^6$$

Per una larghezza di banda di 5 MHz si ha un guadagno:

$$A = \frac{96 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^6} = 19{,}2$$

Nel caso di necessità di avere $A = 25$ risulta:

$$C_t = \frac{S}{2\pi A\,B} = \frac{9 \cdot 10^{-3}}{6{,}28 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 10^6} = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{785} = 11{,}45 \cdot 10^{-12}\,\text{F} = 11{,}45 \text{ pF}$$

Problema 319. Se un triodo, collegato come ripetitore catodico, deve alimentare un cavo coassiale, la cui impedenza caratteristica è di 75 Ω, quale deve essere la pendenza della valvola per ottenere la massima potenza sul carico stesso? Qual è il valore dell'amplificazione?

Soluzione. La resistenza equivalente al triodo deve risultare dello stesso valore di quella caratteristica del cavo:

$$R_r = 75 = \frac{1}{S}$$

da cui:

$$S = \frac{1}{75} = 13 \cdot 10^{-3} \text{ A/V}$$

Poichè una tale pendenza non è facilmente riscontrabile fra i triodi prodotti in commercio si farà uso di due triodi, collegati in parallelo, che dovranno quindi avere una pendenza di 6,5 mA/V.

Il valore dell'amplificazione realizzata in queste condizioni è:

$$A = \frac{S R_c}{1 + S R_c} = \frac{13 \cdot 10^{-3} \cdot 75}{1 + 13 \cdot 10^{-3} \cdot 75} = \frac{0{,}975}{1 + 0{,}975} = 0{,}495$$

Problema 320. In uno stadio amplificatore, accoppiato a resistenza capacità con il successivo, si vuole introdurre la compensazione in parallelo per le frequenze elevate. La capacità distribuita è di 25 pF, la larghezza di banda che interessa amplificare è di 5 MHz. Quali valori dovranno avere la resistenza di carico e l'induttanza L_p da collegare in serie a questa?

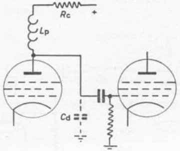


Fig. 131.

Soluzione. La resistenza di carico deve avere un valore uguale alla reattanza della capacità distribuita, alla massima frequenza che interessa amplificare:

$$R_c = X_c = \frac{1}{2 \pi f C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{785} = 1290 \ \Omega$$

La bobina di compensazione avrà un'induttanza:

$$L_p = \frac{R_c}{4\pi f} = \frac{1290}{12{,}56 \cdot 5 \cdot 10^6} = 20{,}5 \cdot 10^{-6} = 20{,}5\ \mu\mathrm{H}$$

Problema 321. In uno stadio amplificatore, a resistenza capacità, si vuole introdurre la compensazione serie per le frequenze elevate. La capacità C_1 risulta di 17 pF ed è doppia di C_2. La larghezza della banda da amplificare è di 5 MHz. Quali valori dovranno avere la resistenza di carico R_c e l'induttanza L_s?

Soluzione. La resistenza di carico deve risultare:

$$R_c = \frac{1}{4\pi f C_1} = \frac{1}{12{,}56 \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 17 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{1065} = 940\ \Omega$$

La bobina da inserire fra le due valvole deve avere un'induttanza:

$$L_s = \frac{1}{2\,(2\pi f)^2\, C_1} = \frac{1}{2\,(6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^5)^2\, 17 \cdot 10^{-12}} = \frac{1}{1980 \cdot 10^{10} \cdot 17 \cdot 10^{-12}} =$$

$$= \frac{1}{3{,}37 \cdot 10^2} = 0{,}003\ \mathrm{H} = 3\ \mathrm{mH}$$

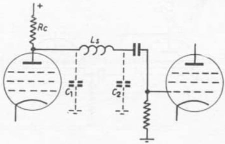


Fig. 132.

Problema 322. Si calcolino i valori della resistenza di carico e delle bobine di compensazione per le alte frequenze in un circuito derivazione serie. Le capacità distribuite sono $C_1 = 17$ pF, $C_2 = 8$ pF, fig. 90. La massima frequenza della banda è 5 MHz.

Soluzione. La resistenza di carico avrà il valore:

$$R_c = \frac{1{,}8}{2\,\pi\, f\,(C_1 + C_2)} = \frac{1{,}8}{6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-12}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^6}{785} = 2300\ \Omega$$

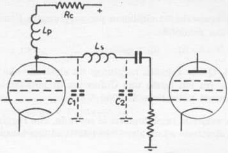


Fig. 133.

La bobina di compensazione in derivazione:

$$L_p = 0{,}12\,(C_1 + C_2)\,R_c^2 = 0{,}12 \cdot 25 \cdot 10^{-12} \cdot 5{,}3 \cdot 10^6 = 16 \cdot 10^{-6} = 16\ \mu\text{H}$$

La bobina di compensazione in serie:

$$L_s = 0{,}52\,(C_1 + C_2)\,R_c^2 = 0{,}52 \cdot 25 \cdot 10^{-12} \cdot 5{,}3 \cdot 10^6 = 70 \cdot 10^{-6} = 70\ \mu\text{H}$$

Problema 323. In un triodo, con tensione anodica di 100 V, la distanza fra la superficie del catodo e l'anodo è di 5 mm. Qual è il tempo di transito degli elettroni dal catodo all'anodo? Qual è il tempo relativo ad una semionda di una tensione a 100 MHz?

Soluzione. Avvalendosi della formula:

$$t = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-6}\, d}{\sqrt{V}}$$

in cui d è la distanza in metri fra gli elettrodi si ha:

$$t = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{100}} = \frac{16{,}5 \cdot 10^{-9}}{10} = 1{,}65 \cdot 10^{-9} = 0{,}00165\ \mu\text{sec}$$

Il tempo corrispondente ad una semionda di una tensione a 100 MHz è:

$$\frac{T}{2} = \frac{\frac{1}{10^8}}{2} = \frac{10^{-8}}{2} = 0{,}005 \ \mu\text{sec}$$

Il tempo impiegato da un elettrone per raggiungere l'anodo è di un terzo della durata di una semionda.

Problema 324. Quale velocità raggiunge un elettrone che si sposta fra due elettrodi affacciati, fra cui esiste una differenza di potenziale di 100 V? Oppure una differenza di potenziale di 2000 V?

Soluzione. La velocità, in chilometri al secondo, che raggiunge un elettrone spostandosi da un elettrodo ad un altro, che risulti ad una tensione di + 100 V è:

$$u = 593 \sqrt{V} = 593 \sqrt{100} = 5930 \text{ km/sec}$$

Se l'altro elettrodo risulta a + 2000 V:

$$u = 593 \sqrt{2000} = 593 \cdot 44{,}7 = 26507 \text{ km/sec}$$

Problema 325. Calcolare la sensibilità di deviazione, per una tensione $V = 1$ V, per una coppia di placchette di un oscilloscopio, in cui:

la distanza l fra il centro delle placchette e lo schermo è di 200 mm;
la lunghezza b delle placchette è di 15 mm;
la distanza a fra le placchette è di 4 mm.

Se la tensione V_0 dell'ultimo anodo dell'oscilloscopio è di 1000 V quale deviazione si ottiene con la tensione di 1 V applicata fra le placchette suddette?

Soluzione. La formula che dà la sensibilità di deviazione è:

$$\frac{D}{V} = \frac{l\,b}{2\,a\,V_0} = \frac{200 \cdot 15}{8\,V_0} = \frac{3000}{8\,V_0} = 375 \text{ mm}/V_0$$

Con una tensione $V_0 = 1000$ V sull'ultimo anodo dell'oscilloscopio, per 1 V applicato fra le placchette si ottiene una deviazione:

$$\frac{375}{1000} = 0{,}375 \text{ mm}$$

DECIBEL

Problema 326. L'entrata di un amplificatore richiede ad un generatore una potenza di 0,001 W. Esso eroga sul carico collegato fra i morsetti di uscita una potenza di 2,75 W. Qual è il guadagno in decibel dell'amplificatore?

Soluzione. Il guadagno presentato dall'amplificatore è:

$$10 \log \frac{P_u}{P_e} = 10 \log \frac{2{,}75}{0{,}001} = 10 \log 2750 = 10 \cdot 3{,}439 = 34{,}39 \text{ dB}$$

Problema 327. Quale guadagno in decibel si ottiene quando la potenza di uscita di un amplificatore è raddoppiata?

Soluzione. Il guadagno ottenuto è:

$$10 \log \frac{P_{u1}}{P_{u2}} = 10 \log 2 = 10 \cdot 0{,}30 = 3 \text{ dB}$$

Problema 328. Un amplificatore eroga una potenza di 200 mW su di una resistenza di carico di 2500 Ω. Un altro amplificatore eroga su di un carico dello stesso valore una potenza di 1,3 W. Quale relazione in decibel esiste fra le due potenze erogate?

Soluzione. Per il primo amplificatore, ritenendo 0 dB = 1 W, si ha una potenza sul carico di:

$$10 \log \frac{0{,}2}{0{,}001} = 10 \log 200 = 10 \cdot 2{,}3 = 23 \text{ dB}$$

Per il secondo amplificatore:

$$10 \log \frac{1{,}3}{0{,}001} = 10 \log 1300 = 10 \cdot 3{,}113 = 31{,}13 \text{ dB}$$

La differenza fra le potenze di uscita dei due amplificatori è di:

$$31{,}13 - 23 = 8{,}13 \text{ dB}$$

Identico risultato si ottiene effettuando direttamente il rapporto fra le due potenze di uscita:

$$\frac{1{,}3}{0{,}2} = 6{,}5 \qquad 10 \log 6{,}5 = 10 \cdot 0{,}813 = 8{,}13 \text{ dB}$$

Problema 329. La potenza di uscita di un amplificatore è di 0,3 W: se essa è aumentata di 120 volte di quanti decibel è aumentata la potenza stessa?

Soluzione. Il rapporto fra la nuova potenza di uscita e la precedente è di 120:

$$\frac{P_2}{P_1} = 120 = 10^2 \cdot 1{,}2 = \log 10^2 + \log 1{,}2 = 2 + 0{,}08 = 2{,}08 \text{ B} = 20{,}8 \text{ dB}$$

Problema 330. Per ottenere l'attenuazione di 7 dB di una potenza $P = 50$ mW a quale valore va portata questa potenza?

Soluzione. Il rapporto fra la potenza P e quella incognita deve corrispondere a 7 dB, cioè:

$$10 \log \frac{P}{P_x} = 7 \text{ dB} = 0{,}7 \text{ B} = \text{antilog } 0{,}7 = 5$$

$$\frac{P}{P_x} = \frac{50}{P_x} = 5 \qquad P_x = \frac{50}{5} = 10 \text{ mW}$$

Problema 331. A quanti watt corrisponde una potenza di -30 dB, rispetto quella normale di 0 dB $= 0{,}001$ W?

Soluzione. La potenza data in decibel è:

$$-30 \text{ dB} = -3 \text{ B} = \log 10^{-3}$$

Al valore di 10^{-3} corrisponde il rapporto fra la potenza in esame e quella normale $P_0 = 10^{-3}$ W, cioè:

$$10^{-3} = \frac{P}{P_0}$$

quindi:

$$P = 10^{-3} \cdot P_0 = 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-6} \text{ W} = 1 \ \mu\text{W}$$

Problema 332. Un amplificatore eroga sul carico una potenza $P_u = 45$ dB (prendendo come potenza di riferimento $P_0 = 6$ mW): qual è la potenza in watt fornita al carico?

Soluzione.

$$45 \text{ dB} = 4{,}5 \text{ B} = 10^4 \text{ antilog } 0{,}5$$

Poichè è:

$$\text{antilog } 0{,}5 = 3{,}16$$

e la caratteristica 4 indica che tale valore va moltiplicato per 10^4 il rapporto:

$$\frac{P_u}{P_0} = 3{,}16 \cdot 10^4$$

quindi:

$$P_u = P_0 \cdot 3{,}16 \cdot 10^4 = 3{,}16 \cdot 10^4 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 31{,}6 \text{ W}$$

Problema 333. Il livello di uscita di un microfono a bobina mobile è di $-$ 60 dB rispetto ad 1 V, quando è collegato ad un carico di 50 Ω. Quale guadagno deve fornire un amplificatore per ottenere una potenza di uscita di 2 W su 5000 Ω, quando si collega alla sua entrata il microfono suddetto?

Soluzione. Livello d'ingresso $= -$ 60 dB rispetto 1 V.

Tensione d'ingresso:

$$V_e = \text{antilog} - 60/20 = \text{antilog} - 3 = 0{,}001 \text{ V}$$

Potenza d'ingresso:

$$P_e = V_e^2/R = 0{,}001^2/50 = (10^{-3})^2/5 \cdot 10 = 10^{-6}/5 \cdot 10 = 10^{-7}/5 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

guadagno da ottenere:

$$N = 10 \log P_u/P_e = 10 \log 2/(2 \cdot 10^{-8}) = 10 \log 10^8 = 80 \text{ dB}$$

Problema 334. Un attenuatore ha la resistenza di entrata di 10 Ω e quella di uscita di 10 Ω. Applicando ad esso una tensione $V_e = 8$ V si ha una tensione di uscita $V_u = 2$ V. Calcolare l'attenuazione in decibel della tensione e della potenza.

Soluzione. L'attenuazione della tensione è:

$$20 \log \frac{2}{8} = 20 \log 0{,}25 = 20 \cdot (-1{,}4) = -12 \text{ dB}$$

Per l'attenuazione della potenza:

$$P_e = \frac{V_e^2}{R} = \frac{64}{10} = 6{,}4 \text{ W}$$

$$P_u = \frac{V_u^2}{R} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \text{ W}$$

$$10 \log \frac{0{,}4}{6{,}4} = 10 \log 0{,}063 = 10 \cdot (-2 + 0{,}8) = -12 \text{ dB}$$

Problema 335. Un triodo amplificatore (i cui parametri sono $\mu = 10$ ed $R_a = 5000\ \Omega$) è collegato con una resistenza di fuga di griglia di 1 MΩ ed una resistenza di carico di 20 000 Ω. Quale guadagno in decibel fornisce?

Soluzione. L'amplificazione di tensione realizzata è:

$$A = \frac{\mu R_c}{R_a + R_c} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^4} = \frac{2 \cdot 10^5}{2{,}5 \cdot 10^4} = 8$$

Ritenendo $V_e = 1$ V sarà $V_u = 8$ V.

$$g = 20 \log \frac{V_u}{V_e} + 10 \log \frac{R_1}{R_2} = 20 \log 8 + 10 \log \frac{10^6}{2 \cdot 10^4} =$$

$$= 20 \cdot 0{,}9 + 10 \cdot 1{,}7 = 35 \text{ dB}$$

Problema 336. I dati, forniti dal costruttore di un amplificatore audio, sono i seguenti: potenza massima 34 dB; potenza nominale (distorsione 5%) 33 dB; entrata $-$ 85 dB. A quali potenze in watt corrispondono i due valori suddetti e quale deve essere la tensione di entrata (per un valore della resistenza di questa di 1 MΩ) per ottenere la potenza nominale? Il livello 0 dB = 6 mW.

Soluzione. Per la potenza massima di uscita dell'amplificatore risulta:

$$34 \text{ dB} = 3{,}4 \text{ B} = 10^3 \text{ antilog } 0{,}4$$

$$P = 10^3 \cdot 2{,}5 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 15 \text{ W}$$

La potenza nominale, con il 5% di distorsione, è:

$$33 \text{ dB} = 3{,}3 \text{ B} = 10^3 \text{ antilog } 0{,}3$$

$$P = 10^3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 12 \text{ W}$$

Per il calcolo della tensione da applicare all'ingresso:

$$-85 \text{ dB} = -90 + 5 \text{ dB} = -9 + 0{,}5 \text{ B} = 10^{-9} \text{ antilog } 0{,}5$$

la potenza fornita all'ingresso dell'amplificatore è:

$$P_e = 10^{-9} \cdot 3{,}1 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = V^2/R$$

e la relativa tensione:

$$V = \sqrt{P_e R} = \sqrt{10^{-9} \cdot 3{,}1 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6} = \sqrt{18{,}6 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 4{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 4{,}3 \text{ mV}$$

Problema 337. Un amplificatore fornisce un guadagno di 40 dB, con una tensione all'entrata di 0,5 V su una resistenza $R_e = 1\ \text{M}\Omega$. La resistenza del carico all'uscita è $R_u = 4000\ \Omega$. Determinare la tensione sul carico e la potenza resa.

Soluzione. Poichè le resistenze R_e ed R_u hanno valori differenti:

$$40\ \text{dB} = 20 \log \frac{V_u}{V_e} + 10 \log \frac{R_e}{R_u}$$

La tensione di uscita è:

$$V_u = V_e \operatorname{antilog} \frac{40 - 10 \log \dfrac{R_e}{R_u}}{20} = 0{,}5 \operatorname{antilog} \frac{40 - 10 \log \dfrac{10^6}{4000}}{20} =$$

$$= 0{,}5 \operatorname{antilog} \frac{40 - 10 \log 250}{20} = 0{,}5 \operatorname{antilog} \frac{16}{20} = 0{,}5 \operatorname{antilog} 0{,}8 =$$

$$= 0{,}5 \cdot 6{,}3 = 3{,}15\ \text{V}$$

La potenza di uscita:

$$P_u = \frac{V_u^2 \cdot 10^3}{R_u} = \frac{3{,}15^2 \cdot 10^3}{4000}\ \text{mW} = 2{,}5\ \text{mW}$$

Problema 338. Un amplificatore fornisce ad un carico di 2500 Ω una potenza ad un livello di + 22 VU. Se la potenza fornita al suo ingresso è di 0,0012 W quale guadagno in potenza è fornito dall'amplificatore?

Soluzione. Una potenza di 1 VU (volume unit) corrisponde ad 1 dB, con 0 dB = 1 mW.

La potenza di uscita fornita dall'amplificatore è di:

$$22\ \text{VU} = 22\ \text{dB} = 2{,}2\ \text{B} = 10^2 \operatorname{antilog} 0{,}2 = 10^2 \cdot 1{,}58 = 158\ \text{mW}$$

Il guadagno in potenza ottenuto con l'ingresso specificato è:

$$g = \frac{158 \cdot 10^{-3}}{1{,}2 \cdot 10^{-3}} = 131 = 10^2 \cdot 1{,}31 = 2{,}117\ \text{B} = 21{,}17\ \text{dB}$$

Problema 339. I tre stadi, che costituiscono un amplificatore di tensione, forniscono ciascuno un guadagno di 30,25 e 14 dB: per ottenere una tensione di uscita di 15 V quale valore dovrà avere la tensione applicata all'ingresso dell'amplificatore?

Soluzione. Il guadagno totale dell'amplificatore è di:

$$30 + 25 + 14 = 69 \text{ dB}$$

Ritenendo di ugual valore la resistenza dell'entrata e quella dell'uscita dell'amplificatore.

$$69 = 20 \log \frac{V_u}{V_e}$$

$$\frac{69}{20} = \log \frac{V_u}{V_e} = 3{,}40 = 10^3 \text{ antilog } 0{,}4 = 2512$$

All'ingresso dell'amplificatore è necessario applicare una tensione:

$$V_e = \frac{15}{2512} = 0{,}0059 \text{ V}$$

per ottenere l'uscita di 15 V.

Problema 340. Un microfono con uscita di — 60 dBm, su un carico di 200 Ω, è collegato ad un amplificatore, che fornisce una resa di 35 dBm su un carico di 10 Ω. Qual è la tensione di uscita del microfono? Qual è il guadagno dell'amplificatore e quali la tensione presente sul carico e la potenza ad esso fornita?

Soluzione. Poichè la potenza che corrisponde al livello zero è:

$$0 \text{ B} = 1 \text{ mW}$$

$$-60 \text{ dB} = -6 \text{ B} = 10^{-6} \text{ mW}$$

quindi la potenza fornita dal microfono ad un carico di 200 Ω è:

$$P = 10^{-6} \text{ mW} = 10^{-9} \text{ W}$$

La tensione di uscita del microfono è:

$$V = \sqrt{P\,R} = \sqrt{10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^2} = 10^{-3}\sqrt{0{,}2} = 0{,}45 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 0{,}45 \text{ mV}$$

L'amplificatore eleva la potenza di uscita del microfono da — 60 dB a + 35 dB, quindi il suo guadagno è 60 + 35 = 95 dB:

$$g = 95 \text{ dB} = 9{,}5 \text{ B} = 10^9 \log 0{,}5 = 3{,}16 \cdot 10^9$$

Poichè l'uscita del microfono è di 10^{-9} W la potenza di uscita dell'amplificatore è:

$$P_u = 10^{-9} \cdot 3{,}16 \cdot 10^9 = 3{,}16 \text{ W}$$

Anche non calcolando il guadagno fornito dall'amplificatore si può ottenere la potenza di uscita:

$$35 \text{ dB} = 3{,}5 \text{ B} = 10^3 \text{ antilog } 0{,}5 = 10^3 \cdot 3{,}16$$

$$P_u = 10^3 \cdot 3{,}16 \cdot 10^{-3} = 3{,}16 \text{ W}$$

Questa potenza corrisponde ad una tensione sul carico di 10 Ω di:

$$V_u = \sqrt{3{,}16 \cdot 10} = 5{,}6 \text{ V}$$

Problema 341. L'intensità del campo a R.F. del segnale desiderato è di 20 μV e quella di un segnale interferente è di 6 μV. Qual è il rapporto segnale-disturbo in decibel?

Soluzione. Il rapporto fra le tensioni del segnale e del disturbo è:

$$\frac{20}{6} = 3{,}33$$

$$20 \log 3{,}33 = 20 \cdot 0{,}52 = 14 \text{ dB}$$

Problema 342. Un ricevitore a modulazione di frequenza ha un'impedenza d'ingresso di 75 Ω. Con un segnale di 300 μV esso fornisce all'altoparlante una potenza di + 17 dBm. Calcolare il livello della potenza all'ingresso del ricevitore, in decibel; il guadagno in decibel del ricevitore; la potenza di uscita in watt.

Soluzione. La potenza fornita all'ingresso del ricevitore è:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(3 \cdot 10^{-4})^2}{75} = \frac{9 \cdot 10^{-8}}{75} = 0{,}12 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

che corrisponde in decibel, con livello 0 di 1 mW:

$$10 \log \frac{0{,}12 \cdot 10^{-8}}{10^{-3}} = 10 \log 1{,}2 \cdot 10^{-6} = 10\,(-6 + 0{,}08) = -60{,}8 \text{ dB}$$

Il guadagno in decibel del ricevitore è:

$$60{,}8 + 17 = 77{,}8 \text{ dB}$$

Per calcolare la potenza di uscita:

$$17 \text{ dB} = 1{,}7 \text{ B} = 10 \text{ antilog } 0{,}7 = 10 \cdot 5$$

$$P_u = 10 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 50 \text{ mW}$$

Problema 343. Accordato alla frequenza del generatore, un ricevitore necessita di una tensione di entrata di 3 μV per fornire la potenza di uscita normalizzata. Se la sua sintonia è spostata di 2 kHz occorre una tensione all'entrata di 125 μV per ottenere nuovamente la potenza di uscita normalizzata. Qual è la sensibilità del ricevitore espressa in decibel e qual è la sua selettività (espressa in decibel fuori risuonanza)?

Soluzione. La sensibilità del ricevitore, prendendo 0 dB = 1 μV, è:

$$s = 20 \log \frac{3}{1} = 20 \log 0{,}477 = 9{,}54 \text{ dB}$$

L'attenuazione che si ha a 2 kHz fuori risuonanza è:

$$20 \log \frac{125}{3} = 20 \cdot 1{,}620 = 32{,}4 \text{ dB}$$

Problema 344. Un preamplificatore richiede una tensione all'entrata $V_e = 10\ \mu\text{V}$ su $R_e = 100\ \text{k}\Omega$, per fornire una potenza all'uscita di 1 mW, su una linea con $R_u = 600\ \Omega$. Calcolarne il guadagno in decibel.

Soluzione. La tensione all'uscita risulta:

$$V_u = \sqrt{P\,R_u} = \sqrt{10^{-3} \cdot 600} = \sqrt{0{,}6} = 0{,}78 \text{ V}$$

L'amplificazione fornita è:

$$A = 20 \log \frac{V_u}{V_e} + 10 \log \frac{R_1}{R_2} = 20 \log \frac{0{,}78}{10^{-5}} + 10 \log \frac{10^5}{600} =$$

$$= 20 \log 0{,}78 \cdot 10^5 + 10 \log 1{,}665 \cdot 10^2 = 20\,[5 \cdot (-1{,}89)] + 10\,(2 \cdot 0{,}22) = 104 \text{ dB}$$

Problema 345. Un amplificatore fornisce un'amplificazione di 50 a 1000 Hz. Se a 50 Hz l'amplificazione si riduce a 5 qual è l'attenuazione relativa, espressa in decibel, del volume alle frequenze basse? Se il 5% della tensione di uscita è introdotto come controreazione qual è l'amplificazione alle frequenze suddette e l'attenuazione relativa a 50 Hz?

Soluzione. L'attenuazione relativa a 50 Hz, senza controreazione è:

$$20 \log \frac{A_b}{A} = 20 \log \frac{5}{50} = -20 \log \frac{50}{5} = -20 \text{ dB}$$

Con la controreazione:

a 1000 Hz $\quad A' = \dfrac{A}{1 + \beta A} = \dfrac{50}{1 + 50 \cdot 0{,}05} = 14{,}3$

a 50 Hz $\quad A'_b = \dfrac{5}{1 + 5 \cdot 0{,}05} = 4$

L'attenuazione relativa a 50 Hz, con la controreazione, è:

$$20 \log \frac{A'_b}{A'} = -20 \log \frac{A'}{A'_b} = -20 \log \frac{14{,}3}{4} = -11 \text{ dB}$$

Problema 346. Due triodi hanno rispettivamente le seguenti caratteristiche: $\mu = 30$ ed $R_a = 75$ kΩ; $\mu = 20$ ed $R_a = 20$ kΩ. Quale dei due fornirà l'amplificazione più elevata introducendo sull'anodo un carico $R_c = 25$ kΩ? Quale sarà il relativo valore in decibel?

Soluzione. Con il primo triodo si ha:

$$A_1 = \frac{\mu R_c}{R_a + R_c} = \frac{30 \cdot 2{,}5 \cdot 10^4}{2{,}5 \cdot 10^4 + 7{,}5 \cdot 10^4} = 7{,}5$$

Con il secondo triodo si ha:

$$A_2 = \frac{20 \cdot 2{,}5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 + 2{,}5 \cdot 10^4} = 11{,}1$$

Il valore dell'amplificazione del secondo triodo rispetto al primo:

$$20 \log \frac{A_2}{A_1} = 20 \log \frac{11{,}1}{7{,}5} = 3{,}4 \text{ dB}$$

COMPLESSI FORMA RETTANGOLARE

Problema 347. Ad un circuito sono applicate due tensioni che dànno luogo separatamente a due correnti, $\bar{I}_1 = 4{,}72 + j\,9{,}34$ A e $\bar{I}_2 = 3{,}76 + j\,2{,}35$ A. Qual è la corrente risultante nel circuito?

Soluzione. La corrente risultante nel circuito è la somma delle due correnti:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = (4{,}72 + j\,9{,}34) + (3{,}76 + j\,2{,}35) = 8{,}48 + j\,11{,}69 \text{ A}$$

Problema 348. Ad un condensatore di 0,01 μF, in serie ad un resistore di 20 kΩ, è applicata una tensione di 100 V alla frequenza di 400 Hz. Determinare il valore della corrente nel circuito e quello della tensione esistente su ognuno degli elementi che lo costituiscono.

Soluzione.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-8}} = \frac{10^6}{25{,}12} = 39\,800 \ \Omega$$

$$\bar{Z} = 20 \cdot 10^4 - j\,39{,}8 \cdot 10^4$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100}{20 \cdot 10^4 - j\,39{,}8 \cdot 10^4} =$$

$$= \frac{100\,(20 \cdot 10^4 + j\,39{,}8 \cdot 10^4)}{(20 \cdot 10^4 - j\,39{,}8 \cdot 10^4)\,(20 \cdot 10^4 + j\,39{,}8 \cdot 10^4)} =$$

$$= \frac{(2 + j\,3{,}98)\,10^6}{4 \cdot 10^8 + j\,7{,}96 \cdot 10^8 - j\,7{,}96 \cdot 10^8 - j^2\,15{,}8 \cdot 10^8} =$$

$$= \frac{(2 + j\,3{,}98)\,10^6}{19{,}8 \cdot 10^8} = \frac{(2 + j\,3{,}98)\,10^{-2}}{19{,}8} = (0{,}1 + j\,0{,}205)\,10^{-2}$$

$$\bar{V}_R = \bar{I}\,R = (0{,}1 + j\,0{,}205)\,10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^4 = 20 + j\,41$$

$$\bar{V}_C = \bar{I}\,X_C = (0{,}1 + j\,0{,}205)\,10^{-2} \cdot 3{,}98 \cdot 10^4 = 39{,}8 + j\,81{,}59$$

I valori scalari delle tensioni sono:

$$V_R = \sqrt{20^2 + 41^2} = \sqrt{2081} = 45{,}7 \text{ V}$$

$$V_C = \sqrt{39{,}8^2 + 81{,}59^2} = \sqrt{8230} = 90{,}7 \text{ V}$$

Problema 349. Un condensatore ed un resistore, collegati in parallelo, sono inseriti fra i morsetti di un generatore la cui tensione ha il valore $176 + j\,132$ V e la corrente totale fornita al circuito suddetto ha l'intensità $-2 + j\,11$ A. Quali risultano le espressioni complesse delle correnti negli elementi del circuito? Quali sono i valori scalari della tensione e della corrente?

Soluzione.

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{V}}{R} = \frac{176 + j\,132}{R} \quad \text{corrente in fase con la tensione}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}}{X} = \frac{176 + j\,132}{\dfrac{1}{\omega C}} = 176\,\omega C + j\,132\,\omega C$$

I valori scalari sono:

$$|\bar{V}| = \sqrt{176^2 + 132^2} = \sqrt{48\,400} = 220 \text{ V}$$

$$|\bar{I}| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125} = 11{,}2 \text{ A}$$

Problema 350. Ad un circuito, costituito da un condensatore di 0,02 μF, una bobina di 30 H ed una resistenza di 1000 Ω, è applicata una tensione di 100 V alla stessa frequenza di quella di risonanza del circuito. Quali valori hanno la corrente che circola in questo e le tensioni su R, L e C?

Soluzione.

$$f_0 = \frac{1}{6{,}28\sqrt{30 \cdot 2 \cdot 10^{-8}}} = \frac{10^4}{48{,}6} = 206 \text{ Hz}$$

$$X_L = 6{,}28 \cdot 206 \cdot 30 = 38{,}8 \cdot 10^3 \ \Omega$$

$$\bar{Z} = 10^3 + j\,38{,}8 \cdot 10^3 - j\,38{,}8 \cdot 10^3 = 10^3 + j\,0 \qquad Z = 1000 \ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{1000} = 0{,}1 \text{ A}$$

$$V_C = I\,X_C = 0{,}1 \cdot 38{,}8 \cdot 10^3 = 3880 \text{ V}$$

$$V_L = I\,X_L = 0{,}1 \cdot 38{,}8 \cdot 10^3 = 3880 \text{ V}$$

$$V_R = I\,R = 0{,}1 \cdot 10^3 = 100 \text{ V}$$

Problema 351. Una bobina, collegata in serie ad un condensatore di 10 μF, è inserita su di una rete a 110 V 50 Hz: il valore della corrente che vi circola è $8 + j\,3$ A. Quali valori hanno la reattanza e la resistenza della bobina?

Soluzione.

$$\bar{V} = 110 + j\,0 \qquad \bar{I} = 8 + j\,3$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{110 + j\,0}{8 + j\,3} = \frac{110 + j\,0}{8 + j\,3}\,\frac{8 - j\,3}{8 - j\,3} = \frac{880 - j\,330}{64 + 9} =$$

$$= \frac{880}{73} - j\,\frac{330}{73} = 12 - j\,4{,}52$$

$$X_C = \frac{1}{\omega\,C} = \frac{10^6}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 10} = \frac{10^3}{3{,}14} = 318 \ \Omega$$

Della reattanza capacitiva di 318 Ω si ha la neutralizzazione da parte della reattanza induttiva, meno 4,52 Ω che fanno parte dell'impedenza del circuito, cioè la bobina ha una reattanza di 318 − 4,52 = 313,48 Ω. La sua resistenza è di 12 Ω.

Problema 352. Calcolare i valori dell'impedenza di un circuito in serie, costituito da un condensatore di 250 pF, una bobina di 200 μH ed un resistore di 10 Ω, alla frequenza di risonanza f_0 ed a $\pm$ 20 kHz rispetto ad f_0.

Soluzione. Alla frequenza di risonanza:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{6{,}28\sqrt{200 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^9}{6{,}28\sqrt{50\,000}} =$$

$$= \frac{10^9}{6{,}28 \cdot 224} = \frac{10^6}{1{,}41} = 0{,}710 \text{ MHz}$$

risulta:

$$Z_0 = R = 10\ \Omega$$

Ad f_0 corrisponde una pulsazione:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 6{,}28 \cdot 0{,}71 \cdot 10^6 = 4{,}45 \cdot 10^6 \text{ rad/sec}$$

A 20 kHz corrisponde una pulsazione:

$$\omega = 6{,}28 \cdot 20 \cdot 10^3 = 0{,}125 \cdot 10^6 \text{ rad/sec}$$

quindi:

$$\omega_0 \pm \omega = 4{,}45 \cdot 10^6 \pm 0{,}125 \cdot 10^6 = (4{,}45 \pm 0{,}125)\,10^6$$

$$\omega_1 = 4{,}57 \cdot 10^6 \qquad \omega_2 = 4{,}32 \cdot 10^6$$

A 710 + 20 kHz risultano:

$$X_L = \omega_1 L = 4{,}57 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 914\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{4{,}57 \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{1140} = 876\ \Omega$$

A 710 − 20 kHz risultano:

$$X_L = 4{,}32 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 864\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{4{,}32 \cdot 10^6 \cdot 250 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{1080} = 925\ \Omega$$

I valori dell'impedenza fuori risonanza risultano:

$Z = R + j\,(X_L - X_C) =$
a + 20 kHz $\quad = 10 + j\,(914 - 876) = 10 + j\,38$
a − 20 kHz $\quad = 10 + j\,(864 - 925) = 10 - j\,62$

Problema 353. Un circuito è costituito da due impedenze $\bar{Z}_1 = 8 + j\,100$ e $\bar{Z}_2 = 0 - j\,100$, collegate in parallelo; la corrente che vi circola ha l'intensità di 1,3 A. Qual è la corrente in ciascun ramo del circuito?

Soluzione. L'impedenza del circuito è:

$$Z_t = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(8 + j\,100)\,(0 - j\,100)}{(8 + j\,100) + (0 - j\,100)} = \frac{-j\,800 - j^2\,10\,000}{8} =$$

$$= 1250 - j\,100$$

La tensione che deve risultare applicata al circuito è:

$$\bar{V} = \bar{I} \cdot Z_t = (1{,}3 + j\,0)\,(1250 - j\,100) = 1625 - j\,130 \text{ V}$$

e la corrente nel ramo di Z_1 è:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{Z_1} = \frac{1625 - j\,130}{8 + j\,100} = \frac{(1625 - j\,130)\,(8 - j\,100)}{(8 + j\,100)\,(8 - j\,100)} =$$

$$= \frac{13\,000 - j\,162\,500 - j\,1040 + j^2\,13\,000}{10\,064} = 0 - j\,16{,}3 \text{ A}$$

il cui valore scalare è:

$$|I| = \sqrt{16{,}3^2} = 16{,}3 \text{ A}$$

La corrente nel ramo di Z_2 è:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{Z_2} = \frac{1625 - j\,130}{0 - j\,100} = \frac{(1625 - j\,130)\,(0 + j\,100)}{(0 - j\,100)\,(0 + j\,100)} =$$

$$= \frac{j\,162\,500 - j^2\,13\,000}{10\,000} = 1{,}3 + j\,16 \text{ A}$$

il cui valore scalare è:

$$|I_2| = \sqrt{1{,}3^2 + 16^2} = \sqrt{257{,}69} = 16{,}05 \text{ A}$$

Problema 354. Un circuito oscillatorio in parallelo (costituito da una bobina di 0,25 H ed un condensatore di 0,5 μF) ha una resistenza trascurabile. Determinarne l'impedenza alle frequenze di 400, 450 e 500 Hz e la tensione che, ad ognuna di esse, va applicata per ottenere una corrente di 0,1 mA.

Soluzione. Per applicare la formula:

$$Z = \frac{j\,\omega\,L}{1 - \omega^2\,L\,C}$$

si calcolano anzitutto ω ed ω^2 alle varie frequenze ed $L\,C$:

a 400 Hz	$\omega = 6{,}28 \cdot 400 = 2{,}51 \cdot 10^3$	$\omega^2 = 6{,}31 \cdot 10^6$
a 450 Hz	$\omega = 6{,}28 \cdot 450 = 2{,}82 \cdot 10^3$	$\omega^2 = 7{,}95 \cdot 10^6$
a 500 Hz	$\omega = 6{,}28 \cdot 500 = 3{,}14 \cdot 10^3$	$\omega^2 = 9{,}86 \cdot 10^6$

$$L\,C = 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}125 \cdot 10^{-6}$$

a 400 Hz $\quad Z = \dfrac{j\,2{,}51 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25}{1 - 6{,}31 \cdot 10^6 \cdot 0{,}125 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{j\,0{,}628 \cdot 10^3}{1 - 0{,}79} = j\,2980\ \Omega$

a 450 Hz $\quad Z = \dfrac{j\,2{,}82 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25}{1 - 7{,}95 \cdot 10^6 \cdot 0{,}125 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{j\,0{,}707 \cdot 10^3}{1 - 0{,}99} = j\,70\,700\ \Omega$

a 500 Hz $\quad Z = \dfrac{j\,3{,}14 \cdot 10^3 \cdot 0{,}25}{1 - 9{,}86 \cdot 10^6 \cdot 0{,}125 \cdot 10^{-6}} = \dfrac{j\,0{,}787 \cdot 10^3}{1 - 1{,}23} = -\,j\,3420\ \Omega$

$$V = I\,Z =$$

a 400 Hz	$= 0{,}0001 \cdot 2980 = 0{,}29$ V
a 450 Hz	$= 0{,}0001 \cdot 70\,700 = 70{,}7$ V
a 500 Hz	$= 0{,}0001 \cdot 3420 = 0{,}34$ V

Problema 355. Dato il circuito di fig. 134 calcolare la corrente che circola in ognuno dei due rami in parallelo.

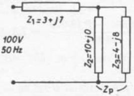


Fig. 134.

Soluzione.

$$Z_p = \frac{Z_2\,Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{10\,(4 - j\,8)}{10 + 4 - j\,8} = \frac{40 - j\,80}{14 - j\,8}\,\frac{14 + j\,8}{14 + j\,8} =$$

$$= \frac{1200 - j\,800}{260} = 4{,}65 - j\,3$$

$$Z_t = Z_1 + Z_p = (3 + j\,7) + (4{,}65 - j\,3) = 7{,}65 + j\,4$$

I corrispondenti valori scalari sono:

$$|Z_p| = \sqrt{4{,}65^2 - 3^2} = 5{,}53\ \Omega$$

$$|Z_t| = \sqrt{7{,}65^2 + 4^2} = 8{,}6\ \ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z_t} = \frac{100}{7{,}65 + j\,4} = \frac{100\,(7{,}65 - j\,4)}{(7{,}65 + j\,4)\,(7{,}65 - j\,4)} = \frac{765 - j\,400}{58 + 16} =$$

$$= 10{,}3 - j\,5{,}4\ \text{A}$$

$$|I| = \sqrt{10{,}3^2 - 5{,}4^2} = \sqrt{135} = 11{,}6\ \text{A}$$

Questa corrente provoca sull'impedenza Z_p, equivalente al parallelo di Z_2 e Z_3, una caduta di tensione:

$$V_p = I\,Z_p = 11{,}6 \cdot 5{,}53 = 64{,}3\ \text{V}$$

La corrente in Z_2, ramo puramente resistivo, è:

$$I_2 = \frac{V_p}{Z_2} = \frac{64{,}3}{10} = 6{,}43\ \text{A}$$

La corrente in Z_3:

$$I_3 = \frac{V_p}{Z_3} = \frac{64{,}3}{4 - j\,8} = \frac{64{,}3\,(4 + j\,8)}{(4 - j\,8)\,(4 + j\,8)} = \frac{257 + j\,515}{80} = 3{,}2 + j\,6{,}43$$

il cui valore scalare è:

$$|I_3| = \sqrt{3{,}2^2 + 6{,}43^2} = \sqrt{51{,}7} = 7{,}2\ \text{A}$$

Problema 356. Nel circuito, come dallo schema accluso, dai valori indicati, quale intensità ha la corrente che vi circola?

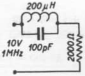


Fig. 135.

Soluzione.

$$X_L = \omega\,L = 6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 1256\ \Omega \qquad \bar{Z}_1 = 0 + j\,1256$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^6}{628} = 1590\ \Omega \qquad \bar{X}_2 = 0 - j\,1590$$

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1\,\bar{X}_2}{\bar{X}_1 + \bar{X}_2} = \frac{(0 + j\,1256)\,(0 - j\,1590)}{(0 + j\,1256) + (0 - j\,1590)} = \frac{1\,997\,000\,(0 + j\,234)}{(0 - j\,234)\,(0 + j\,234)} =$$

$$= \frac{j\,467{,}3 \cdot 10^6}{54\,756} = 0 + j\,8530$$

$$\bar{Z}_t = (2000 + j\,0) + (0 + j\,8530) = 2000 + j\,8530$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_t} = \frac{10 + j\,0}{2000 + j\,8530} = \frac{(10 + j\,0)\,(2000 - j\,8530)}{(2000 + j\,8530)\,(2000 - j\,8530)} =$$

$$= \frac{20\,000 - j\,85\,300}{4 \cdot 10^6 + 72{,}25 \cdot 10^6} = 26 \cdot 10^{-5} - j\,11 \cdot 10^{-4}$$

$$I = \sqrt{676 \cdot 10^{-10} + 121 \cdot 10^8} = 10^{-4}\,\sqrt{127{,}7} = 11{,}3 \cdot 10^{-4} = 1{,}13 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}$$

Problema 357. Calcolare il valore della corrente nel circuito di fig. 136, alla frequenza di 800 kHz.

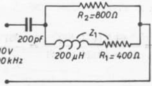


Fig. 136.

Soluzione.

$$\omega = 2\,\pi\,f = 6{,}28 \cdot 800 \cdot 10^3 = 5{,}02 \cdot 10^6\ \mathrm{rad/sec}$$

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\,\omega\,L = 400 + j\,5{,}02 \cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 400 + j\,1005$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 = 800\ \Omega$$

$$\bar{Z}_p = \frac{Z_1\,Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(400 + j\,1005)\,800}{800 + 400 + j\,1005} = \frac{(400 + j\,1005)\,8}{8 + 4 + j\,10} =$$

$$= \frac{3200 + j\,8040}{12 + j\,10}\,\frac{12 - j\,10}{12 - j\,10} = \frac{38\,400 - j\,32\,000 + j\,96\,480 + 80\,400}{244} =$$

$$= 486 + j\,264$$

$$X_C = \frac{1}{5{,}02 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = \frac{10^4}{10} = 1000\ \Omega$$

$$Z_t = 486 + j\,264 - j\,X_C = 486 + j\,264 - j\,1000 = 486 - j\,736$$

$$|Z_t| = \sqrt{486^2 - 736^2} = \sqrt{777\,892} = 881\ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10}{881} = 0{,}011\ \text{A}$$

Problema 358. Quali cadute di tensione si verificano sulle tre impedenze del circuito di fig. 137? Quali sono i valori delle correnti nei due rami in parallelo?

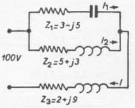


Fig. 137.

Soluzione. Dal parallelo di Z_1 e Z_2 risulta:

$$Z_p = \frac{Z_1\,Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(3 - j\,5)\,(5 + j\,3)}{8 - j\,2} =$$

$$= \frac{(15 + j\,9 - j\,25 - j^2\,15)\,(8 + j\,2)}{(8 - j\,2)\,(8 + j\,2)} = \frac{240 + j\,60 - j\,128 + 32}{68} = 4 - j1$$

$$Z_t = Z_p + Z_3 = (4 - j\,1) + (2 + j\,9) = 6 + j\,8$$

La corrente totale risulta:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{Z_t} = \frac{100 + j\,0}{6 + j\,8} = \frac{100\,(6 - j\,8)}{(6 + j\,8)\,(6 - j\,8)} = \frac{600 - j\,800}{100} = 6 - j\,8\ \text{A}$$

Il cui valore scalare è:

$$I = \sqrt{6^2 - 8^2} = \sqrt{100} = 10\ \text{A}$$

La caduta di tensione su Z_3 è:

$$\bar{V}_3 = \bar{I}\,Z_3 = (6 - j\,8)\,(2 + j\,9) = 12 + j\,54 - j\,16 + 72 = 84 - j\,38\ \text{V}$$

La caduta di tensione sui due rami in parallelo:

$$\bar{V} - \bar{V}_3 = (100 - j\,0) - (84 + j\,38) = 16 - j\,38 \text{ V}$$

La corrente in $\bar{Z}_1$:

$$\bar{I}_1 = \frac{16 - j\,38}{3 - j\,5} = \frac{(16 - j\,38)(3 + j\,5)}{(3 - j\,5)(3 + j\,5)} = \frac{238 - j\,34}{34} = 7 - j\,1 \text{ A}$$

ed:

$$|\bar{I}_1| = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{50} = 7{,}08 \text{ A}$$

La corrente in $\bar{Z}_2$:

$$\bar{I}_2 = \frac{16 - j\,38}{5 + j\,3} = \frac{(16 - j\,38)(5 - j\,3)}{(5 + j\,3)(5 - j\,3)} = \frac{80 - j\,48 - j\,190 + 114}{34} =$$

$$= 5{,}7 - j\,7 \text{ A}$$

ed:

$$|\bar{I}_2| = \sqrt{5{,}7^2 - 7^2} = \sqrt{81{,}5} = 9 \text{ A}$$

Problema 359. Al circuito di fig. 138 sia applicata una tensione $V = 10$ V ad una frequenza $f = 5$ MHz. Calcolare: l'impedenza totale del circuito; la corrente totale che vi circola; la potenza dissipata. Si calcoli infine il valore dell'elemento reattivo da collegare in serie al circuito per porlo in risonanza.

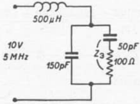


Fig. 138.

Soluzione. La pulsazione è:

$$\omega = 2\,\pi\,f = 6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^6 = 31{,}4 \cdot 10^6$$

Le impedenze dei singoli rami risultano:

$$\bar{Z}_1 = j\,\omega\,L = j\,31{,}4 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = j\,1570\ \Omega$$

$$Z_2 = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{31{,}4\cdot 10^6\cdot 150\cdot 10^{-12}} = -j\frac{10^6}{4{,}71\cdot 10^3} = -j\,212\ \Omega$$

$$Z_3 = 100 - j\frac{1}{\omega C} = 100 - j\frac{1}{31{,}4\cdot 10^6\cdot 50\cdot 10^{-12}} =$$

$$= 100 - j\frac{10^6}{1{,}57\cdot 10^3} = 100 - j\,636\ \Omega$$

L'impedenza risultante dal parallelo di Z_2 e Z_3 è:

$$Z_p = \frac{Z_2\cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{-j\,212\,(100 - j\,636)}{-j\,212 + 100 - j\,636} =$$

$$= \frac{-j\,21\,200 - 13{,}4\cdot 10^4}{100 - j\,848} = \frac{(-j\,2{,}12\cdot 10^4 - 13{,}4\cdot 10^4)\,(100 + j\,848)}{(100 - j\,848)\,(100 + j\,848)} =$$

$$= \frac{10^4\,(-j\,212 + 1798 - 1340 - j\,11\,363)}{10^4 + j\,84\,800 - j\,84\,800 + 71{,}9\cdot 10^4} = \frac{458 - j\,11\,575}{1 + 71{,}9} =$$

$$= 6{,}28 - j\,158\ \Omega$$

$$Z_t = Z_1 + Z_p = j\,1570 + 6{,}28 - j\,158 = 6{,}28 + j\,1412\ \Omega$$

$$|Z_t| = \sqrt{6{,}28^2 + 1412^2} = 1412\ \Omega$$

$I_t = \dfrac{V}{Z} = \dfrac{10}{1412} = 0{,}007$ A corrente fornita dal generatore al circuito

$$|Z_p| = \sqrt{6{,}28^2 + 158^2} = 158\ \Omega$$

La tensione presente sui rami in parallelo:

$$V_p = I_t\,Z_p = 7\cdot 10^{-3}\cdot 158 = 1{,}26\ \text{V}$$

La corrente nel ramo con impedenza Z_3 è:

$$|Z_3| = \sqrt{100^2 + 636^2} = 645\ \Omega$$

ed:

$$I_3 = \frac{V_p}{Z_3} = \frac{1{,}26}{645} = 0{,}0018\ \text{A}$$

La potenza dissipata in questo ramo del circuito è:

$$P = R I^2 = 100 \cdot 0{,}0018^2 = 0{,}00032 \text{ W} = 0{,}32 \text{ mW}$$

La reattanza complessiva del circuito è induttiva ed ha il valore di 1412 Ω.

La capacità da collegare in serie, per ottenere la risonanza a 5 MHz, è:

$$C_s = \frac{1}{X_L \omega} = \frac{1}{1{,}41 \cdot 10^3 \cdot 6{,}28 \cdot 5 \cdot 10^6} = \frac{1}{4{,}42 \cdot 10^{10}} =$$

$$= 0{,}226 \cdot 10^{-10} = 22{,}6 \text{ pF}$$

COMPLESSI FORMA POLARE

Problema 360. Ad un generatore, con tensione 100 V e frequenza 10 kHz, è collegata una bobina di 160 mH ed una resistenza in serie di 10 kΩ. Determinare con il metodo polare la corrente nel circuito e la tensione presente su ognuno degli elementi che lo costituiscono.

Soluzione.

$$X_L = \omega L = 6{,}28 \cdot 10^4 \cdot 160 \cdot 10^{-3} = 10^4 \ \Omega \qquad \bar{X}_L = 10^4 \underline{/90^\circ}$$

$$\bar{Z} = 10^4 + j\,10^4$$

$$Z = \sqrt{10^8 + 10^8} = 10^4 \sqrt{2} = 1{,}41 \cdot 10^4$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{10^4}{10^4} = 45^\circ$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{100 \underline{/0^\circ}}{1{,}41 \cdot 10^4 \underline{/45^\circ}} = 0{,}00707 \underline{/-45^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{V}_L = \bar{I}\,\bar{X}_L = 7{,}07 \cdot 10^{-3} \cdot \underline{/-45^\circ} \cdot 10^4 \underline{/90^\circ} = 70{,}7 \underline{/45^\circ} \text{ V}$$

$$\bar{V}_R = \bar{I}\,R = 7{,}07 \cdot 10^{-3} \underline{/-45^\circ} \cdot 10^4 = 70{,}7 \underline{/-45^\circ} \text{ V}$$

Problema 361. Ad un generatore, con tensione di 100 V e frequenza di 400 Hz, è collegato un condensatore di 0,01 μF in serie ad un resistore di 20 kΩ. Determinare con il metodo polare la corrente nel circuito e la tensione presente su ognuno degli elementi che lo costituiscono.

Soluzione. La reattanza del condensatore è:

$$X_C = 3{,}98 \cdot 10^4\ \Omega \qquad \overline{X}_C = 3{,}98 \cdot 10^4 \underline{/-90^\circ}$$

$$\overline{Z} = 2 \cdot 10^4 - j\,3{,}98 \cdot 10^4$$

$$Z = \sqrt{(2 \cdot 10^4)^2 + (3{,}98 \cdot 10^4)^2} = 10^4 \sqrt{5{,}98} = 2{,}45 \cdot 10^4$$

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{B}{A} = \text{arctg}\,\frac{3{,}98}{2} = \text{arctg}\,2 = 63{,}5^\circ$$

$$\overline{Z} = 2{,}45 \cdot 10^4 \underline{/-63{,}5^\circ}$$

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{100 \underline{/0^\circ}}{2{,}45 \cdot 10^4 \underline{/-63{,}5^\circ}} = 4{,}08 \cdot 10^{-3} \underline{/63{,}5}\ \text{A}$$

$$\overline{V}_R = \overline{I}\,R = 4{,}08 \cdot 10^{-3} \underline{/63{,}5^\circ} \cdot 20 \cdot 10^3 = 81{,}6 \underline{/63{,}5^\circ}\ \text{V}$$

$$\overline{V}_C = \overline{I}\,\overline{X}_C = 4{,}08 \cdot 10^{-3} \underline{/63{,}5^\circ} \cdot 39{,}8 \cdot 10^3 \cdot \underline{/-90^\circ} = 162 \underline{/-26{,}5^\circ}$$

La caduta di tensione su R è in fase con la corrente ma in anticipo di 63,5° sulla tensione applicata; la tensione su C è in ritardo di 26,5° sulla tensione applicata.

Problema 362. Un generatore applica una tensione di 100 V ad un circuito oscillatorio in serie costituito da un condensatore di 0,01 μF, una bobina di 28 H ed un resistore di 5 kΩ. A risonanza quali valori assumono la corrente nel circuito e le tensioni sui vari elementi di esso?

Soluzione.

$$f_0 = \frac{1}{6{,}28\sqrt{28 \cdot 10^{-8}}} = \frac{10^4}{332} = 300\ \text{Hz}$$

$$X_L = 6{,}28 \cdot 300 \cdot 28 = 52\,740\ \Omega \qquad \overline{X}_L = 52{,}7 \cdot 10^3 \underline{/90^\circ}$$

$$\overline{X}_C = 52{,}7 \cdot 10^3 \underline{/-90^\circ} \qquad \overline{R} = 5 \cdot 10^3 \underline{/0^\circ}$$

$$\overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} = \frac{100 \underline{/0^\circ}}{5 \cdot 10^3 \underline{/0^\circ}} = 20 \cdot 10^{-3} \underline{/0^\circ}$$

$$\overline{V}_C = 52{,}7 \cdot 10^3 \underline{/-90^\circ} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \underline{/0^\circ} = 1054 \underline{/-90^\circ}\ \text{V}$$

$$\overline{V}_L = 52{,}7 \cdot 10^3 \underline{/90^\circ} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \underline{/0^\circ} = 1054 \underline{/90^\circ}\ \text{V}$$

$$\overline{V}_R = 5 \cdot 10^3 \underline{/0^\circ} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \underline{/0^\circ} = 100 \underline{/0^\circ}\ \text{V}$$

FAMIGLIE DI CARATTERISTICHE
DI VALVOLE E TRANSISTORI

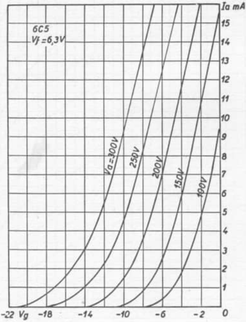


Fig. 139 – Caratteristiche mutue del triodo 6C5.

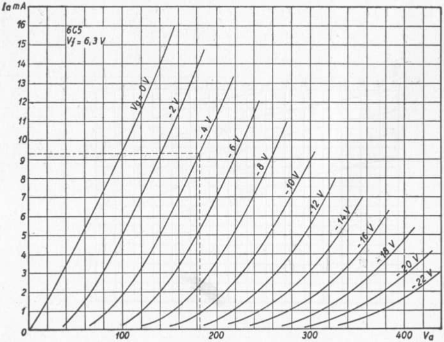


Fig. 140 – Caratteristiche anodiche del triodo 6C5.

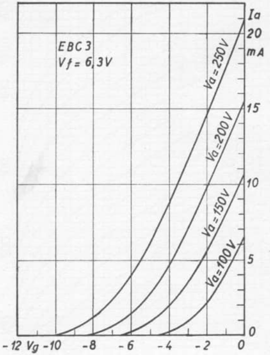


Fig. 141 – Caratteristiche mutue del triodo EBC3.

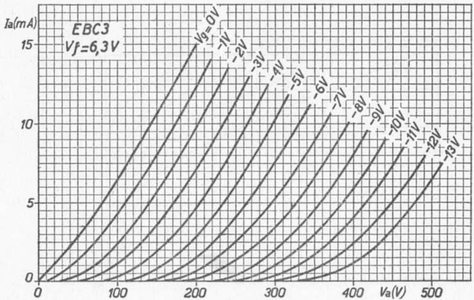


Fig. 142 – Caratteristiche anodiche del triodo EBC3.

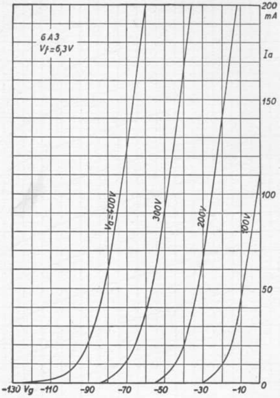


Fig. 143 – Caratteristiche mutue del triodo 6A3.

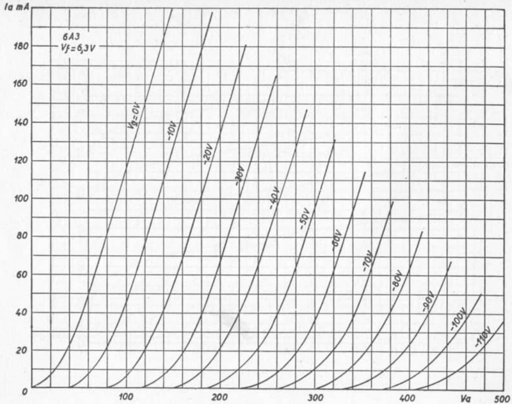


Fig. 144 - Caratteristiche anodiche del triodo 6A3.

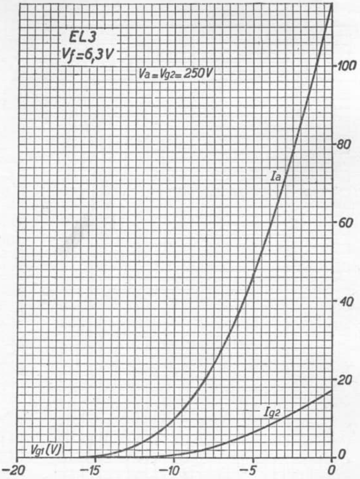


Fig. 145 – Caratteristiche mutue del pentodo EL3.

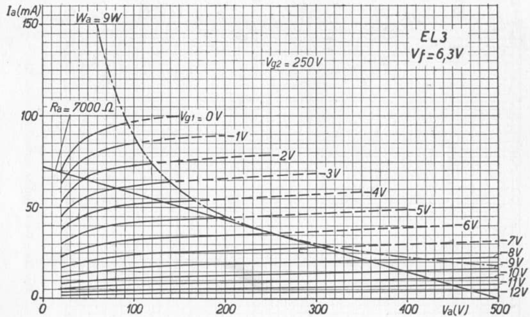


Fig. 146 – Caratteristiche anodiche del pentodo EL3.

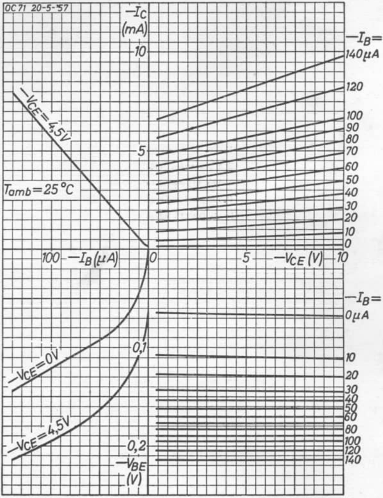


Fig. 147 – Famiglie di caratteristiche del transitore OC 71 con emettitore in comune.

Finito di stampare
il 5 Novembre 1966
nella tipografia
U. Allegretti di Campi
in via Orti, 2 - Milano